

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА**

# **ГЕОМЕТРИЧНА КРИСТАЛОГРАФІЯ**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

**ЧАСТИНА 2**

**ЛЬВІВ – 2015**

**Геометрична кристалографія.** Ч. 2: навч. посібник для студентів ОКР «Бакалавр» напряму 6.040103 – геологія / укл.: Н.О. Словотенко, І.Т. Бакуменко. – Львівський національний університет імені Івана Франка, 2015. – 88 с.

**Укладачі:** кандидат геологічних наук, доцент *Н.О. Словотенко*  
кандидат геолого-мінералогічних наук,  
доцент *І.Т. Бакуменко*

**Рецензент:** доктор геолого-мінералогічних наук,  
професор *О.І. Матковський*

**Відповідальний за випуск:** завідувач кафедри мінералогії,  
доцент *Л.З. Скакун*

**Редактор:** *Лариса Сідлович*

*Затверджено  
на засіданні Вченої ради  
геологічного факультету  
(протокол №222/6 від 10.06.2015 р.)*

## ТЕМА 7 **КООРДИНАТНІ ОСІ ТА ПЛОЩИНИ** **(КРИСТАЛОГРАФІЧНІ КООРДИНАТНІ СИСТЕМИ)**

Необхідність фіксувати у просторі той чи інший напрям (вісь симетрії, або ребро кристала), ту чи іншу площину симетрії (або грань кристала) потребує відповідної координатної системи. Проте користуватися найбільш поширеною в геометрії декартовою системою у кристалографії в багатьох випадках незручно, оскільки прямокутна система координат з однаковими масштабами по осях не дає змоги достатньо повно відобразити різноманітну симетрію кристалів. Тому в кристалографії використовують таку систему координат, у якій *координатні осі X, Y та Z* суміщені з *особливими напрямками* в кристалах, тобто осями симетрії та (або) нормалями до площин симетрії. За відсутності або недостатньої їх кількості (тобто менше трьох) за координатні осі обирають дійсні або можливі ребра кристала.

Особливі напрямки, які обираються за координатні осі, пов'язані з закономірною (трансляційною) внутрішньою будовою (структурою) кристалів. Доведено, що осі симетрії та нормалі до площин симетрії кристалів збігаються з рядами кристалічних ґраток або паралельні їм. Тому вони паралельні і дійсним або можливим ребрам кристалів, і їх також можна обирати за кристалографічні осі.

Координатні системи різних кристалів розрізняються своїми кутовими характеристиками – кутами між осями  $X, Y, Z$  ( $\alpha = \angle YZ$ ,  $\beta = \angle XZ$ ,  $\gamma = \angle XY$ ). При цьому в кристалографії використовують праву систему координат (рис. 1).

Однак лише кутової характеристики під час опису кристалографічної координатної системи недостатньо. Повна характеристика координатної системи повинна включати не лише кутові характеристики, але й різний ступінь еквівалентності (однаковості) тих особливих напрямків, уздовж яких обрані координатні осі. Таким чином, ступінь еквівалентності координатних напрямків відображає, окрім симетрії, ще одну властивість кристалічної речовини – її анізотропію.

Умовно еквівалентність координатних напрямків або їх відсутність можна показати у вигляді одиничних векторів – масштабів  $a, b, c$  – по відповідних координатних осях  $X, Y, Z$ .

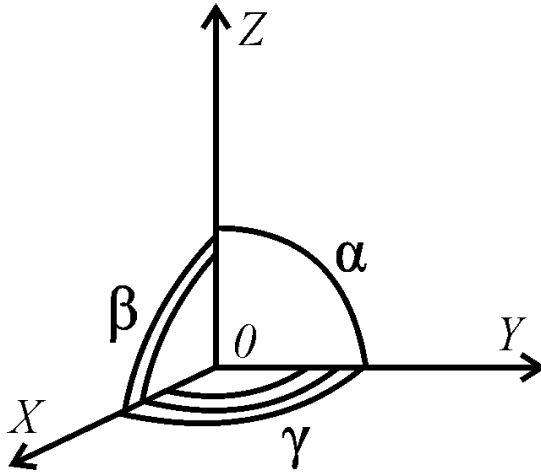


Рис. 1. Права система координат, яку застосовують у кристалографії

За можливими співвідношеннями одиничних векторів,  $a = b = c$ ,  $a = b \neq c$ ,  $a \neq b \neq c$  у кристалографічних координатних системах розрізняють три **категорії кристалів**:

- кристали *вищої категорії* ( $a = b = c$ ) характеризуються повною еквівалентністю координатних осей, що пов'язане з наявністю у групах симетрії таких кристалів кількох осей вищого порядку (обов'язково  $\in 4L_3$ );
- кристали *середньої категорії* ( $a = b \neq c$ ) характеризуються частковою еквівалентністю координатних осей, що пов'язане з наявністю у групах симетрії лише однієї вертикальної осі вищого порядку;
- кристали *нижчої категорії* ( $a \neq b \neq c$ ) характеризуються повною нееквівалентністю координатних напрямків, котру пояснює відсутність у них осей вищого порядку.

За кутовими характеристиками (значеннями кутів  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) між координатними кристалографічними осями розрізняють **сім сингоній** (триклінну, моноклінну, ромбічну, тригональну, тетрагональну, гексагональну і кубічну).

Кутові характеристики та співвідношення координатних осей у кожній із перелічених категорій і сингоній наведено в табл. 1.

Поряд із координатними напрямками (осями  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) розрізняють координатні площини: першу (100), паралельну осям  $YZ$ , другу (010) – паралельну осям  $XZ$ , третю (001) – паралельну осям  $XY$ .

Таблиця 1

## Характеристики координатних систем у сімох сингоніях і трьох категоріях кристалів

Категорія	Ступінь еквівалентності координатних напрямків	Кутові характеристики координатних систем	Сингонії
Нижча	$a \neq b \neq c$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ \neq 120^\circ$	Триклінна
		$\alpha = \gamma = 90^\circ, \beta \neq 90^\circ \neq 120^\circ$ (сучасна установка) $\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma \neq 90^\circ \neq 120^\circ$ (майже не застосовується)	Моноклінна
		$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Ромбічна
Середня	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$ (установка Міллера) $\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$ (установка Браве)	Тригональна
	$a = b \neq c$		Тетрагональна
	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ $\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$	Гексагональна
Вища	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Кубічна

### ПРАВИЛА УСТАНОВКИ КРИСТАЛІВ. КРИСТАЛОГРАФІЧНІ КОНСТАНТИ

А тепер ознайомимося з правилами установки кристалів у різних сингоніях, тобто з вибором кристалографічних осей і одиничних (масштабних) граней.

Для того, щоби символи всіх граней були раціональними, необхідно за координатні осі та площини вибирати дійсні або можливі ребра (або осі симетрії) і грані кристала (або площини симетрії). Оскільки у прямокутній системі координат усі побудови і розрахунки проводити легше, то завжди будемо намагатись вибрати за координатні площини три взаємноперпендикулярні або по можливості близькі до того грані, причому за одиничну грань будемо брати таку (при решті рівних умов), яка відсікає на всіх трьох осях по можливості однакові відрізки.

Грані найбільш зручні для такої координатної системи можуть бути відсутні на даному кристалі. Тому за координатні осі та площини часто змушені обирати хоч і відсутні, але можливі його ребра та грані. Поряд із тим, напрямки дійсних або можливих

ребер кристалів, як уже згадувалося, паралельні напрямкам осей симетрії або нормалей до площин симетрії. Тому за кристалографічні осі завжди обирають осі симетрії та нормалі до площин симетрії, а якщо їх немає, то дійсні або можливі ребра кристалів.

**Установка кристалів кубічної сингонії.** У кубічній сингонії за координатні осі обирають напрямки взаємно перпендикулярних  $3L_4$  або  $3Li_4$  (у високосиметричних видах симетрії) або  $3L_2$  (у низькосиметричних видах). Координатні осі  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  еквівалентні: вони пов'язані наявними в кубічній сингонії  $4L_3$ . Відповідно за координатні площини (100), (010) або (001) тут обираємо три площини нормальні до координатних осей. Координатні площини паралельні граням куба.

За одиничну грань обираємо ту, котра по всіх трьох координатних осях  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  відсікає рівні відрізки. Такою є грань октаедра або кубічного тетраедра. Вона однаково нахилена до всіх трьох координатних осей і перпендикулярна до потрійної осі.

Розглянуті співвідношення у кристалах кубічної сингонії можна записати таким чином:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ; a_o : b_o : c_o = a : 1 : c = 1:1:1,$$

де  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – кути між координатними осями;  $a_o$ ,  $b_o$ ,  $c_o$  – однакові відрізки, які відсікає одинична грань на цих осях. Дані величини повністю визначають весь комплекс граней будь-якого кристала кубічної сингонії. Таким чином, для всіх кристалів кубічної сингонії геометричні константи мають однакові значення, і методами гоніометрії ці кристали неможливо розпізнати. Для цього треба застосувати рентгенометричні, мікрозондові або кристалооптичні методи.

**Установка кристалів тетрагональної сингонії.** У даній сингонії за вісь  $Z$  обираємо напрямки, паралельні четвертій поворотній або четвертій інверсійній або четвертій дзеркально-поворотній осям. За осі  $X$  і  $Y$  обираємо осі  $L_2$  або нормалі до площин симетрії або дійсні або можливі вертикальні грані кристалів. За координатні площини (100) та (010) вибираємо площини, перпендикулярні осям  $X$  та  $Y$ . Координатна площина (001) розташовується нормально до осей четвертого порядку.

За одиничну грань обираємо ту, що по  $X$  та  $Y$  відсікає рівні відрізки і відрізок по осі  $Z$ , який не дорівнює їм. Тому кристалографічні константи для тетрагональної сингонії мають такі значення:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ; 1:1:c.$$

**Установка кристалів ромбічної сингонії.** У ромбічній сингонії, як відомо, у двох видах симетрії є три подвійні взаємно-

перпендикулярні осі симетрії. У третьому (ромбопірамідальному) є одна подвійна поворотна вісь і дві паралельні з нею взаємно перпендикулярні площини симетрії. Вісь  $L_2$  обираємо за вісь  $Z$ . Інші осі  $L_2$  або нормалі до вертикальних площин симетрії обираємо за осі  $X$  і  $Y$ . У зв'язку з тим, що  $a \neq b \neq c$ , умов, які дають змогу вибрати одиничну грань так, щоби вона хоча б по двох осях, робила однакові відрізки, немає. Тому за одиничну грань беремо грань, яка відтинає по всіх трьох кристалографічних напрямках різні відрізки. Кристалографічні константи одержують такі значення:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ; a : 1 : c,$$

тобто характеристичними є дві константи ( $a$  і  $c$ ).

**Установка кристалів моноклінної сингонії.** У моноклінній сингонії подвійну поворотну вісь, а якщо її немає, то нормаль до площини симетрії приймають за другу кристалографічну вісь  $Y$ . Площина, перпендикулярна до подвійної осі, або площина симетрії є можливою гранню кристала (010). У ній паралельно дійсним або можливим ребрам обирають осі  $Z$  та  $X$ . За вісь  $Z$  обираємо напрямом, паралельний ребрам добре розвинених граней одного поясу. (Пояс – це сукупність граней, які перетинаються по паралельних ребрах). При цьому зрозуміло, що друга кристалографічна вісь завжди перпендикулярна тут до першої і третьої. Кут  $\beta$  між першою і третьою кристалографічними осями відмінний від  $90^\circ$  ( $\beta$  відмінний у різних речовин). Одиничні відрізки по всіх трьох осях різні. Звідси одержуємо такі геометричні константи:

$$\alpha = \gamma = 90^\circ, \beta \neq 90^\circ; a : 1 : c.$$

Характеристичними є три константи ( $\beta$ ,  $a$  і  $c$ ).

**Установка кристалів триклінної сингонії.** У триклінній сингонії немає осей і площин симетрії. Тому за координатні осі обираємо якісь три ребра. За вісь  $Z$  обираємо ребро, яке лежить на перетині добре розвинених граней одного поясу. В одній із граней цього поясу обираємо ребро за вісь  $X$ : ця грань стає паралельною до осей  $Z$  та  $X$ . Вона отримує символ (010). Нормаль до неї орієнтуємо строго направо. Якесь інше ребро, орієнтоване направо приблизно під прямим кутом до осей  $Z$  та  $X$ , обираємо за вісь  $Y$ .

У триклінній сингонії немає таких ребер і граней, кути між котрими є прямими. Звідси всі кути між кристалографічними осями косі, а відрізки, які відтинає одинична грань на цих осях, мають різну довжину. Тому  $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ; a : 1 : c$ . Характеристичними є п'ять констант ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $a$  і  $c$ ).

Таким чином, щоби вивести всі можливі орієнтації граней кристала кубічної сингонії, треба знати 0 констант, тетрагональної – 1, ромбічної – 2, моноклінної – 3, триклінної – 5.

Незалежно від масштабів і співвідношень  $a : b : c$  та значень кутів  $\alpha, \beta, \gamma$ , символ одиничної грані в усіх розглянутих сингоніях буде (111).

**Установка кристалів гексагональної й тригональної сингоній.** Установка Браве. У цій чотирикоординатній установці за вертикальну вісь  $Z$  обирають напрямок паралельний осі вищого порядку ( $L_3, Li_3$  або  $L_6$ ). Для спрощення деяких кристалографічних розрахунків і надання однотипності індексам у символах граней однієї простої форми тут у позиції бісектриси між осями  $X$  та  $Y$  вводять додаткову третю горизонтальну вісь  $U$ , еквівалентну осям  $X$  та  $Y$ . Позитивні напрямки кожної з горизонтальних осей утворюють між собою кут  $120^\circ$ . Вісь  $Y$ , як і в тетрагональній сингонії, у сучасній установці орієнтують строго направо (рис. 2).

За осі  $X, Y, U$  обирають напрямки  $L_2$ . Якщо їх немає, то обирають нормалі до  $P$ , а якщо і їх немає, то дійсні або можливі ребра кристалів.

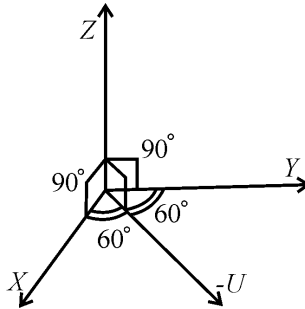


Рис. 2. Система кристалографічних осей у гексагональній сингонії

За одиничну грань беруть таку, яка відсікає рівні відрізки на двох еквівалентних горизонтальних осях, і відрізок на осі  $Z$ , який не дорівнює їм.

Тому в установці Браве можливі дві орієнтації таких одиничних граней. Вони можуть бути: 1) паралельними одній із горизонтальних осей; 2) орієнтованими косо, відсікаючи на одній із горизонтальних осей відрізок удвічі менший, ніж на двох сусідніх осях.

Ясно, що масштабні одиниці виміру на трьох еквівалентних горизонтальних осях є однаковими, завдяки наявності вертикальної потрійної або шестерної осі симетрії.

У результаті в установці Браве маємо такі геометричні константи:

$$\gamma = 120^\circ; \beta = \alpha = 90^\circ; 1 : 1 : 1 : c.$$

Тут характеристичною є одна константа  $c$ .



Установка Міллера. У тригональних кристалах із ромбоедричним габітусом, або в яких можливі грані ромбоєдра, зручно користуватися не чотирма, а трьома кристалографічними осями. Оскільки в кристалах цього типу є потрійна вісь, то з одного косо нахиленого до неї ребра ми завжди можемо вивести поворотом на  $120^\circ$  навколо  $L_3$  ще два йому рівних. Такі три ребра ми приймаємо за координатні осі  $X, Y, Z$ . Спрямовані вгору кінці є додатними. Дійсну або можливу грань, перпендикулярну до потрійної осі, беремо за одиничну (111) (рис. 3).

Геометричні константи кристала у тригональній (ромбоедричній установці Міллера) будуть  $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$ ;  $1 : 1 : 1$ .

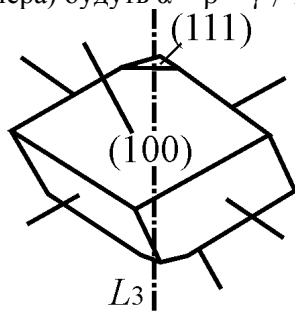


Рис. 3. Орієнтування кристалографічних осей (тригональна установка) і символи граней тригонального кристала

Як у першій, так і у другій установці для повного виводу комплексу всіх граней і ребер необхідно знати лише одну геометричну константу, різну в неоднакових речовинах: значення  $c$  в установці Браве або  $a$  в установці Міллера.

### Питання для самоконтролю

З якими особливими напрямками в кристалах суміщують координатні осі?

Яку установку обирають для кристалів різних сингоній?

З чим пов'язана повна еквівалентність координатних осей у кристалах вищої категорії ( $a = b = c$ )?

Чому в кристалах середньої категорії еквівалентність координатних осей часткова ( $a = b \neq c$ )?

Чому в кристалах нижчої категорії повністю нееквівалентні координатні напрямки ( $a \neq b \neq c$ )?

Які типи поворотних осей симетрії в кристалах кубічної сингонії обирають за координатні напрямки?

## ТЕМА 8

### **ЗАКОН РАЦІОНАЛЬНОСТІ ПАРАМЕТРІВ. ЗАКОН РАЦІОНАЛЬНОСТІ ВІДНОШЕНЬ ПАРАМЕТРІВ (ЗАКОН ЦІЛИХ ЧИСЕЛ, ЗАКОН АЮЇ)**

Знання розташування елементів симетрії кристалів і положення в них граней, фіксованих сферичними координатами  $\phi$  і  $\rho$ , незважаючи на простоту і наочність, не завжди дає змогу уявити закономірності взаємного розміщення граней кристала. Якщо ж надати кожній грані кристала цифровий кристалографічний символ, то за ним без проекції можна зрозуміти особливості огранування того чи іншого кристала.

Для того, щоб такі символи одержати, необхідно зафіксувати кожен грань кристала у просторі. А для цього треба спочатку вибрати для досліджуваного кристала кристалографічну координатну систему, а потім виміряти ті відрізки (параметри), котрі грань кристала, продовжена до перетину з координатними осями, на них відсіче (рис. 4). Таким чином положення грані буде зафіксоване.

Однак під час росту кристала параметри, що їх відсікає кожна грань на осях  $X$ ,  $Y$  і  $Z$ , будуть змінюватись. Тому абсолютні величини параметрів грані (відрізки  $OA$ ,  $OB$  і  $OC$ ) непостійні. Але оскільки під час росту грані кристала переміщуються *паралельно* самі собі, незмінними залишаються відношення цих відрізків ( $OA : OB : OC = OA_1 : OB_1 : OC_1 = \text{const}$ ). Ці відношення й фіксують положення будь-якої площини, паралельної даній грані ( $ABC$ ) щодо обраних координатних осей.

Таким чином, щоби зафіксувати положення грані, необхідно одержати відношення її параметрів, виміряних у певних масштабах. Ці масштаби закладені у самому кристалі – його кристалічній структурі. Справді, працюючи з кристалами, ми фактично маємо справу не тільки з матеріальними площинами (гранями або дійсними ребрами), а й з відповідними вузловими сітками і вузловими рядами структури, точніше, з цілими системами паралельних сіток і рядів просторової ґратки (рис. 5). Координатними осями, обраними не по випадкових, а по *особливих* напрямках або в загальному випадку паралельно ребрам кристала, є вузлові ряди просторової ґратки, в яких ніби закладені природні масштабні одиниці – міжвузлові відстані  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$  (періоди ідентичності). Неважко переконатись, що у структурі кристала завжди знайдеться вузлова сітка просторової ґратки (наприклад,  $AB$  на рис. 5), котра відсіче на вузлових рядах, обраних за координатні осі (або на паралельних їм рядах) ціле або раціональне дробне число періодів ідентичності.

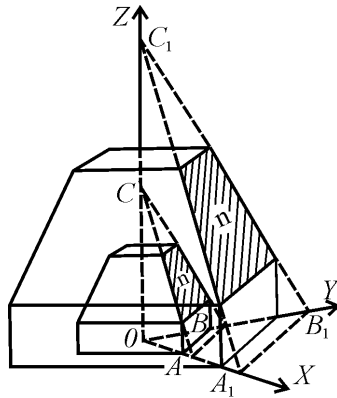


Рис. 4. Пересуваючись під час росту кристала паралельно сама собі, грань  $n$  відсікає на координатних осях  $X, Y$  і  $Z$  відрізки з таким відношенням  $OA : OB : OC = OA_1 : OB_1 : OC_1$

Таким чином, **закон раціональності параметрів** стверджує, що якщо параметри грані ( $OA, OB, OC$ ) виміряти примітивними відрізками  $a_0, b_0, c_0$ , то отримаємо цілі або раціональні дробні числа.

Оскільки параметри вузлових сіток, виміряні відповідними періодами ідентичності (примітивними відрізками) вздовж координатних осей, виражаються раціональними числами, то подвійні відношення відповідних параметрів *двох* будь-яких сіток, також раціональні. Це становить суть **закону раціональності відношень параметрів граней**. Відношення раціональних чисел можна привести до відношення якихось цілих чисел. Тому цей закон часто називають **законом цілих чисел**. Він виражає числові співвідношення між відрізками, утвореними на кристалографічних (координатних) осях гранями даного кристала. Закон був відкритий французьким абатом Р.Ж. Аюї (Наїу) в 1783 р., тому його називають також **законом Аюї**.

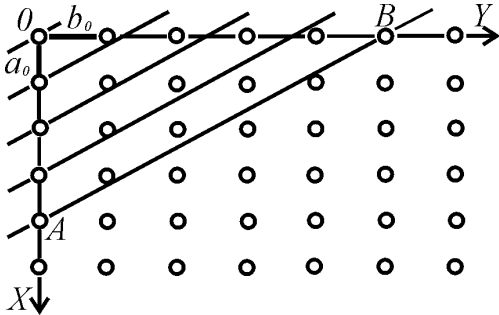


Рис. 5. До доказу раціональності відношень параметрів вузлових сіток (граней)

Однак на практиці, якщо ми визначаємо символи граней кристала, ми нічого не знаємо ні про його структуру, ні, тим більше, про періоди ідентичності (міжвузлові відстані  $a_o$ ,  $b_o$ ,  $c_o$ , котрі можна було би прийняти за одиниці масштабів на відповідних осях. Але звернемось до рис. 6, на якому зображені дві грані кристала – площини  $ABC$  і  $A_oB_oC_o$ . Бачимо, що найбільш розумно у цьому разі прийняти за одиниці виміру (одиниці масштабів) по кожній осі відповідні параметри деякої грані цього кристала (наприклад, параметри грані  $A_oB_oC_o$ , відношення котрих  $OA_o : OB_o : OC_o = a_o : b_o : c_o$  можна прийняти за відношення одиниць масштабів по відповідних осях). Враховуючи те, що кристалографічні координатні осі в загальному випадку нееквівалентні, єдиний масштаб вимірів по всіх осях непридатний. У результаті відрізки  $OA$ ,  $OB$  і  $OC$ , які відсікає грань  $ABC$  (їх відношення  $OA : OB : OC = a : b : c$ ), можна виміряти масштабами, що їх надає грань  $A_oB_oC_o$ . Положення заданої грані  $ABC$  буде зафіксоване подвійним відношенням відповідних параметрів граней  $(\frac{a}{a_o} : \frac{b}{b_o} : \frac{c}{c_o})$ . При цьому величини  $\frac{a}{a_o} : \frac{b}{b_o} : \frac{c}{c_o}$

у некристалографічних фігур можуть приймати довільні значення, тоді як для кристалів у кристалографічній координатній системі вони обов'язково виявляються раціональними. Тому їх відношення можна привести до відношення цілих взаємно простих чисел (*індексів Вейса*):

$$\frac{a}{a_o} : \frac{b}{b_o} : \frac{c}{c_o} = p : q : r,$$

де  $p$ ,  $q$ ,  $r$  – цілі прості числа, які звичайно не перевищують 10.

Ця особливість огранування кристалів і була виявлена Аюї та відома як другий важливий закон кристалографії, що описує огранування кристалічних багатогранників.

Отже, відрізки, утворені перетином будь-якої грані на кристалографічних осях, називаються *параметрами граней*. Параметри однієї з граней, яка перетинає всі осі, можуть бути прийняті за одиниці виміру вздовж кожної осі. Їх називають *одиничними параметрами*, а таку грань – *одиничною*. Тобто одиничні відрізки відтинає на осях одинична грань. Тоді сформулювати другий закон геометричної кристалографії – закон раціональності відношень параметрів – можна таким чином: відношення відрізків, які відсікає будь-яка грань кристала на трьох його ребрах, вибраних за координатні осі, дорівнює відношенню простих цілих чисел за умови, що ці відрізки виміряні одиничними відрізками.

Тепер закон Аюї (закон цілих чисел) в загальному випадку можна сформулювати так.

**Якщо параметри однієї грані ( $d, e, f$ ) розділити на відповідні параметри іншої ( $a, b, c$ ), то відношення отриманих величин буде дорівнювати відношенню цілих відносно невеликих чисел  $p : q : r$  (тобто  $\frac{d}{a} : \frac{e}{b} : \frac{f}{c} = p : q : r$ ).**

Інше формулювання цього закону, відомого також як закон подвійних відношень параметрів, таке.

**Подвійні відношення відповідних параметрів двох граней дорівнюють відношенням цілих відносно невеликих чисел.**

Чому ці числа невеликі? Це пояснюється кристалохімічними факторами. Згадаймо так званий закон Браве. Згідно із законом Браве, реальні грані кристалів відповідають плоским сіткам кристалічної структури з великими *ретикюлярними щільностями* (тобто з максимальною кількістю атомів на одиниці площі). Такі грані характеризуються максимальною силою міжатомних хімічних зв'язків, а відстані між цими атомами мінімальні. Тому на реальних кристалах переважають лише грані з малими відношеннями параметрів (малими індексами Вейса). Великі відношення можливі тільки у другорядних (віцинальних гранях), які утворюють штриховку та інші ускладнення на поверхні плоских граней.

У світлі сучасних знань закон Аюї є лише наслідком упорядкування внутрішньої будови кристалів – тривимірної періодичності в розміщенні матеріальних частинок: атомів, іонів, молекул.

Індекси  $p, q, r$  (індекси Вейса) для кристалографічної практики виявилися невдалими, оскільки для граней, паралельних будь-яким координатним осям, відповідний індекс буде дорівнювати нескінченності ( $\infty$ ), що незручно при розрахунках. Це спонукало перейти до індексів  $h, k, l$ , запропонованих у 1839 р. професором Кембриджського університету В. Міллером. Індекси Міллера – це найменші цілі числа, зворотно пропорційні числам  $p, q, r$ :

$$h : k : l = \frac{1}{p} : \frac{1}{q} : \frac{1}{r} = \frac{a_o}{a} : \frac{b_o}{b} : \frac{c_o}{c}, \text{ де } \frac{1}{\infty} = 0.$$

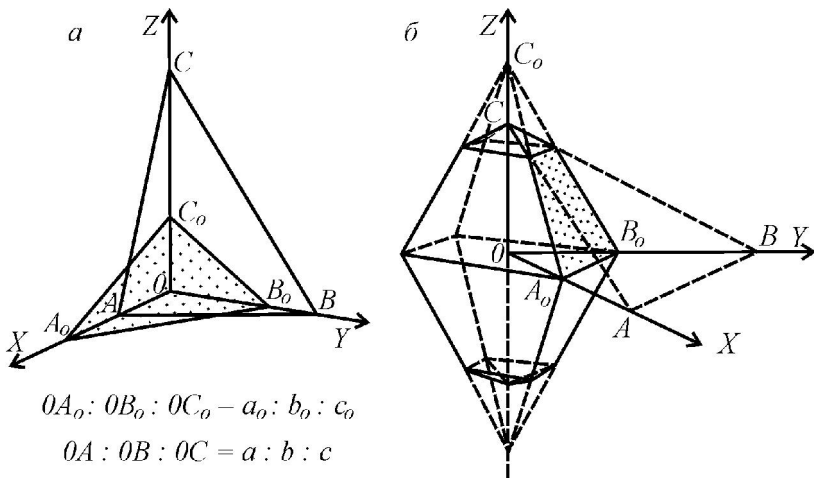


Рис. 6. До визначення символу грані кристала. Точками виділено одиничну грань  $A_0B_0C_0$

Індекси Міллера  $h, k, l$ , взяті в круглі дужки ( $hkl$ ) без знаків відношення (які ми маємо на увазі!), є символом грані кристала.

У нашому прикладі для грані  $ABC$  (рис. 6)

$$p : q : r = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} : 3 = 1 : 3 : 6; \quad h : k : l = \frac{1}{1} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 6 : 2 : 1, \text{ тобто } (hkl) =$$

(621). Отже, індекси символу грані пишуть підряд без ком і беруть у круглі дужки. На перше місце ставлять індекс по осі  $X$ , на друге – індекс по осі  $Y$ , а на третє – індекс по осі  $Z$ . Якщо грань перетинає від’ємний напрямок якоїсь координатної осі, то над відповідним індексом Міллера ставиться знак “мінус”. Наприклад, позначення грані  $(\bar{2}\bar{3}1)$  показує, що вона відтинає відрізок на негативному кінці осі  $Y$ .

Очевидно, що символом грані, параметри якої прийняті за одиниці масштабів по координатних осях (тобто грані, яка задає відносні масштаби  $a : b : c$ ), буде (111). Звідси й її назва – одинична грань. Одиничні грані, які перетинають негативні кінці кристалографічних осей, мають символи  $(1\bar{1}\bar{1})$ ,  $(\bar{1}\bar{1}1)$ ,  $(1\bar{1}\bar{1})$ . Слід зауважити, що для надання кожній грані кристала цифрового кристалографічного символу потрібна не сама одинична грань, а відносні масштаби по трьох кристалографічних осях, зафіксовані цією гранню. Критерієм правильного вибору одиничної грані є індекси у вигляді невеликих цілих чисел у символах решти граней.

Грані, які паралельні двом кристалографічним осям, називаються *координатними гранями*. Параметри по цих двох осях

дорівнюють  $\infty$ , а відповідні індекси Міллера дорівнюють нулю. Перша координатна грань має символи  $(100)$  і  $(\bar{1}00)$ , друга –  $(010)$  і  $(0\bar{1}0)$ , третя –  $(001)$  і  $(00\bar{1})$ .

Грані, які відтинають одиничні відрізки на двох кристалографічних осях і паралельні іншій осі, називають *двоодиничними гранями*. Двоодиничні грані, які паралельні осі  $X$ , мають символи  $(011)$ ,  $(0\bar{1}1)$ ,  $(01\bar{1})$ ,  $(0\bar{1}\bar{1})$ . Грані, які паралельні осі  $Y$ , мають символи  $(101)$ ,  $(10\bar{1})$ ,  $(\bar{1}01)$ ,  $(\bar{1}0\bar{1})$ , а паралельні осі  $Z$  – символи  $(110)$ ,  $(1\bar{1}0)$ ,  $(\bar{1}10)$ ,  $(\bar{1}\bar{1}0)$ .

Таким чином, на основі закону Аюї можна не лише виявити закономірності в розміщенні будь-яких граней кристала, але й по реальних гранях одержати всі можливі у даному кристалі грані, якщо обрати попередньо координатні осі й одиничну грань, що їх перетинає.

## ОДИНИЧНІ ГРАНІ В КРИСТАЛАХ РІЗНИХ СИНГОНІЙ. СИМВОЛИ ГРАНЕЙ БРАВЕ

Вибираючи одиничну грань, слід враховувати ступінь еквівалентності тих особливих напрямків у кристалі, вздовж котрих виврані координатні осі.

У кристалах **кубічної сингонії** всі три координатні осі еквівалентні між собою, оскільки пов'язані *рівнонахиленими до них осями 3-го порядку* і звідси рівномасштабні. Це означає, що одинична грань  $(111)$  має відсікати рівні відрізки по всіх трьох координатних осях. На стереограмі (рис. 7, *a*) полюс такої грані займає строго визначену позицію: проєктується на вихід осі 3-го порядку (грань перпендикулярна цій осі). Тут розглядається одинична грань, розташована в октанті з позитивними виходами координатних осей  $X, Y, Z$ .

Оскільки  $a_o = b_o = c_o$ , формула визначення символу будь-якої грані кубічного кристала спрощується:  $hkl = \frac{a_o}{a} : \frac{b_o}{b} : \frac{c_o}{c} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ .

Параметри *одиничної* грані тут не входять у розрахунок символів решти граней. Таким чином, для визначення символу грані кристала кубічної сингонії достатньо взяти відношення зворотних параметрів шуканої грані, виміряних будь-якими (однаковими!) масштабними одиницями.

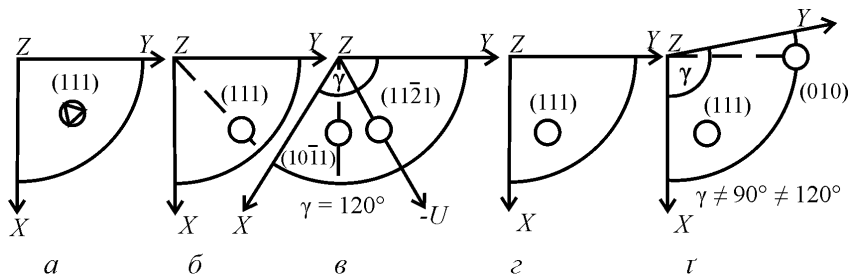


Рис. 7. Положення одиничних граней щодо координатних осей  $X, Y, Z$  на стереограмах кристалів різних сингоній (Егоров-Тисменко, 2005).

Одиничні грані в позитивних октантах:  $a$  – кубічна сингонія;  $b$  – тетрагональна сингонія;  $c$  – гексагональна і тригональна сингонії (в установці Браве);  $d$  – ромбічна сингонія (вісь  $X$  горизонтальна), моноклінна сингонія (вісь  $X$  – похила);  $e$  – триклінна сингонія (осі  $X, Y$  – похилі).

Зображено випадок, коли вісь  $\gamma > 90^\circ$

У кристалах **тетрагональної сингонії** рівномасштабними будуть лише горизонтальні координатні осі  $X$  і  $Y$ , пов'язані поворотом навколо головної осі симетрії  $L_4$  або  $Li_4$ . Тому запис  $(111)$  означає рівність лише двох перших параметрів  $a_o = b_o \neq c_o$ . З цього випливає, що для визначення символів вертикальних граней типу  $(hk0)$ , тобто граней, які перетинають лише рівномасштабні горизонтальні осі, одинична грань не потрібна. Тому її параметри ( $a_o = b_o$ ), як і у випадку з кубічними кристалами, не входять у

символ:  $h : k : 0 = \frac{a_o}{a} : \frac{b_o}{b} (= \frac{a_o}{b}) : 0 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : 0$ , тобто для визначення

символу  $(hk0)$  достатньо знати лише параметри  $a$  і  $b$ .

Для граней типу  $(hkl)$  і  $(h0l)$  або  $(0kl)$ , тобто граней, що перетинають різномасштабні осі, необхідні масштаби, котрі можна одержати на основі параметрів одиничної грані  $(111)$ . Вона рівнонахилена до рівномасштабних координатних осей  $X$  і  $Y$ , тобто розміщена на бісектрисі кута між ними (рис. 7, б).

У кристалах **гексагональної та тригональної сингоній (в установці Браве)** у символах з'являється додатковий четвертий індекс  $i$ , що відповідає новій осі  $U$ . Через це символ стає чотиризначним  $(hkil)$ , причому  $h + k = -i$ . Чотирихіндексові символи називають *символами граней Браве*.

Введення додаткової горизонтальної осі  $U$  в кристалах гексагональної та тригональної сингоній дозволяє вибрати як вихідну не лише одиничну грань на бісектрисі кута в  $120^\circ$ , яка відсікає однакові відрізки на осях  $X, Y$  і має символ  $(11\bar{2}1)$ , але й інші грані на бісектрисах кутів у  $60^\circ$  – зі символами  $(10\bar{1}1)$  або



( $01\bar{1}1$ ), що відсікають рівні відрізки на осях  $X$  і  $-U$  або  $Y$  і  $-U$  відповідно (рис. 7, в). Таким чином, тут можливі одиничні грані двох типів: паралельні одній із горизонтальних осей – типу ( $10\bar{1}1$ ) і косі до всіх горизонтальних осей – типу ( $11\bar{2}1$ ). Останні відтинають на одній із горизонтальних осей відрізок удвічі менший, ніж на двох інших еквівалентних горизонтальних осях.

Для визначення символів граней кристалів гексагональної і тригональної сингоній (в установці Браве) рекомендують спочатку не звертати уваги на «зайву» вісь  $U$ , тим більше що вона заважає під час аналітичних розрахунків. Однак, щоби не плутати чотирьохосну установку Браве з трьохосною Міллера, в кінцеву відповідь слід вставляти додатковий індекс  $i$  по цій осі (або додати точку):  $(hkl) = (hkil) = (hk(\overline{h+k})l)$  або  $(hk \cdot l)$ . Наприклад, у правого кварцу інколи розвинена грань тригонального трапезоєдра ( $51\bar{6}1$ ) або ( $6\bar{1}51$ ).

У кристалах **нижчої категорії** координатні осі  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  нееквівалентні, тому параметри по всіх трьох осях є різними ( $a_o \neq b_o \neq c_o$ ). За одиничну тут можна прийняти будь-яку грань, що перетинає всі три координатні осі (рис. 7, з, r), тобто одиничною може слугувати будь-яка грань загального положення.

Таким чином, символ ( $111$ ) у загальному випадку ще не означає рівності трьох параметрів одиничної грані: одиниці в символі вказують лише на те, що параметри саме цієї грані обрані як відносно одиниці для вимірювання параметрів граней (і ребер) досліджуваного кристала. Очевидно, що відносні одиниці виміру по координатних осях потрібні лише для визначення індексів тих граней кристала, котрі перетинають різномасштабні координатні осі. Тому в кристалах будь-якої сингонії не потрібен відносний масштаб грані, що перетинає лише одну координатну вісь і паралельна двом другим. Нагадуємо, що такі грані називають *координатними* (або *базисними*) і незалежно від величин параметрів одержують символи ( $100$ ), ( $010$ ), ( $001$ ). Зрозуміло, що координатні грані не потребують відносного масштабу й не здатні задавати його.

## ВИЗНАЧЕННЯ СИМВОЛІВ ГРАНЕЙ ПРОСТИХ ФОРМ

Починати слід з установки кристала, згідно з вищенаведеними правилами. Запам'ятаємо, що:

- 1) коли грань паралельна будь-якій із кристалографічних осей, то індекс її по цій осі дорівнює нулю;
- 2) чим менший кут між напрямком осі та нормаллю до грані, тим більший її індекс по цій осі;
- 3) числові параметри граней є величинами зворотними щодо індексів.

Під час визначення символів граней, які належать до однієї простої форми, тобто граней, пов'язаних симетричними операціями даного класу симетрії, слід мати на увазі, що ці грані розміщені щодо координатних осей під однаковими кутами і, відповідно, відсікають на цих осях однакові відрізки. Тому і символи цих граней будуть складатися з однакових індексів. Відмінність у символах полягатиме лише в перестановці та знаках індексів.

У кристалах нижчих сингоній у різних граней однієї простої форми змінюється лише знак індексу. Так, якщо права верхня грань ромбічної дипіраміди має символ (113), то ліва верхня грань тієї ж форми має символ ( $\bar{1}\bar{1}3$ ), права нижня – (1 $\bar{1}\bar{3}$ ), ліва нижня – ( $\bar{1}\bar{1}\bar{3}$ ).

На прикладі моделі кристала натроліту  $\text{Na}_2\text{Al}_2\text{Si}_3\text{O}_{10} \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ , який кристалізується у ромбічній сингонії ромбодипірамідального виду симетрії, розглянемо, як змінюються символи одиничних граней кристала (рис. 8). Ромбічна дипіраміда зі символом (111) верхньої правої грані (рис. 8, а) на лівій верхній грані має символ ( $\bar{1}\bar{1}1$ ), права нижня – (1 $\bar{1}\bar{1}$ ), ліва нижня – ( $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ ). Якщо обернути модель кристала навколо осі Z, то видно, як змінюються символи на «зворотній» стороні, де вісь X має від'ємне значення (рис. 8, б). Верхні грані дипіраміди мають позитивне значення по осі Z, тому відмінне лише значення по осі Y. У полі з позитивною віссю Y символ ромбічної дипіраміди становить ( $\bar{1}11$ ), з негативною – ( $\bar{1}\bar{1}1$ ). Нижні грані мають символи відповідно – ( $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ ), ( $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ ).

Одна з дводиничних граней ромбічної призми має символ (110), оскільки її грані паралельні осі Z. Грань, яка лежить у полі з від'ємним значенням осі Y (рис. 8 а), має символ ( $\bar{1}\bar{1}0$ ). Грань, розташована у полі з від'ємним значенням осі X, але додатним по осі Y, має символ ( $\bar{1}10$ ) (рис. 8, б). А грань, розташована в полі негативних значень осей X і Y, характеризується символом ( $\bar{1}\bar{1}0$ ) (рис. 8, б).

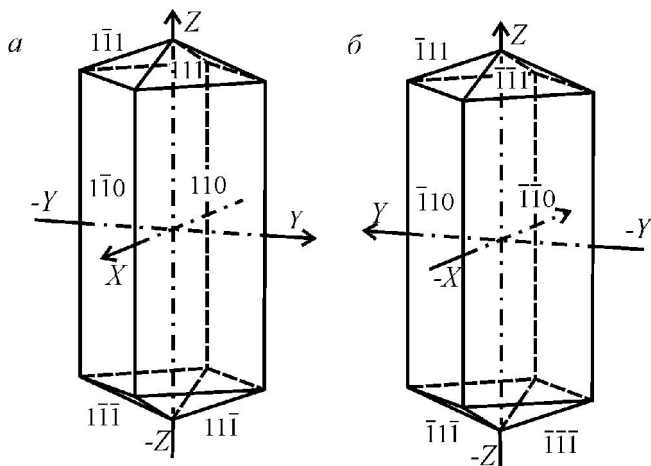


Рис. 8. Символи граней кристала натроліту: *а* – стандартне положення, в якому на передньому плані лежить позитивний кінець осі  $X$ ; *б* – положення, одержане з попереднього (*а*), шляхом обертання кристала навколо осі  $Z$  (вихідний негативний кінець осі  $X$  лежить на передньому плані). Зауважимо, що в ромбічній сингонії осі  $X$  та  $Y$  є неполярними, тобто напрямок  $+X = -X$

У кристалах вищої та середньої категорій числові значення індексів граней однієї й тієї ж форми також зберігаються, але тут при переході від однієї грані до іншої може змінитись як знак індексу, так і послідовність індексів. Прикладом зміни послідовності одних і тих самих індексів у різних граней гексаедра  $\{100\}$  і пентагондодекаедра  $\{210\}$  може слугувати рис. 9, на якому зображено модель кристала піриту  $\text{FeS}_2$ , що кристалізується у дидодекаедричному виді симетрії кубічної сингонії.

Весь комплекс граней конкретної простої форми позначається *узагальненим символом*. Символом усіх граней даної простої форми слугує символ однієї з її граней. Але цей символ ставлять не у круглі дужки, а у фігурні. Наприклад, символ ромбічної дипіраміди (рис. 8) є  $\{111\}$ , гексаедра (рис. 9)  $\{100\}$ , ромбододекаедра  $\{110\}$ , пентагон-додекаедра  $\{210\}$ .

Індекси граней точно і безпомилково можуть бути визначені лише після гоніометричного дослідження кристалів. У курсі кристалографії для мінералогічних цілей необхідно навчитися зв'язувати символи з певними простими формами. Для цього не треба обов'язково визначати числові значення індексів. Наприклад, для грані ромбічної дипіраміди замість  $(113)$  може бути даний символ  $(hhl)$ , який вказує на рівність першого та другого індексів.

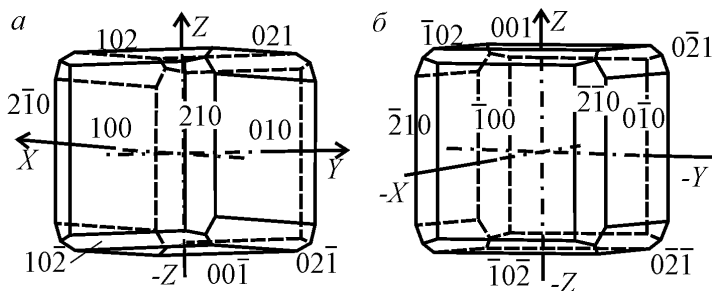


Рис. 9. Символи граней кристала кубічної сингонії на прикладі піриту: *а* – положення, в якому на передньому плані лежать позитивні кінці осей  $X$  і  $Y$ ; *б* – положення, одержане з попереднього (*а*), шляхом обергання кристала навколо осі  $Z$  (від'ємні кінці осей  $X$  і  $Y$  вже лежать на передньому плані)

Символ грані має вказувати на положення грані *щодо кристалографічних осей*, а саме: чи займає грань *загальне* (похиле) положення щодо цих осей, і відсікає на них неоднакове число одиничних відрізків – грань  $(hkl)$ , чи певне *власне* положення, тобто перетинає лише дві кристалографічні осі, або тільки одну, або (в кубічній сингонії) відтинає на двох осях рівне число одиничних відрізків.

Грані у **власних** позиціях орієнтуються паралельно або перпендикулярно до елементів симетрії (всіх або частини з них). У кубічній сингонії полюси власних простих форм розташовуються лише на координатних або діагональних лініях, а загальних форм – між цими лініями.

*Всі загальні форми мають максимальне число граней у даному виді симетрії і належать тільки до одного геометричного типу (мають однакову назву).* Якщо грань займає загальне положення щодо кристалографічних осей і відсікає на них неоднакове число одиничних відрізків, то всі індекси такої грані різні, а символ її  $(hkl)$ . Символ із різними індексами  $\{hkl\}$  завжди відповідає *загальній* формі. Але тільки в кубічній сингонії загальній простій формі відповідає виключно даний загальний тип символу  $\{hkl\}$ . У всіх сингоніях нижчої категорії та в багатьох видах симетрії сингоній середньої категорії *загальні* форми можуть мати і власні типи символів, а не тільки  $\{hkl\}$ . Наприклад, у триклінній, моноклінній і ромбічній сингоніях прості форми  $\{hhl\}$  також є загальними формами (вони геометрично однотипні з формами  $\{hkl\}$ ).

### Питання для самоконтролю

Що таке параметри граней і в чому полягає закон раціональності параметрів?

Сформулюйте закон раціональних відношень параметрів двох граней.

Які співвідношення між індексами Вейса  $p:q:r$  і Міллера  $h:k:l$ ?

Які символи мають одиничні грані кристалів різних сингоній?

Які символи мають усі грані ромбічної призми  $\{210\}$  і ромбічної піраміди  $\{211\}$ ? Побудуйте відповідну стереограму.

## ТЕМА 9

### **ПРОЕКТУВАННЯ МОДЕЛЕЙ НИЖЧОЇ КАТЕГОРІЇ З УСТАНОВКОЮ І ВИЗНАЧЕННЯМ СИМВОЛІВ ГРАНЕЙ ПРОСТИХ ФОРМ**

**ТРИКЛІННА СИНГОНІЯ.** За координатні осі  $X$ ,  $Y$  і  $Z$  обирають три дійсних або можливих ребра кристала (рис. 11, а). Є три правила для орієнтування триклінного кристала та, відповідно, визначення кристалографічних осей. 1) Найбільш розвинена зона має бути вертикальною. Вісь цієї зони буде віссю  $Z$ . 2) У вертикальній зоні мають бути обрані дві координатні прості форми: одна як  $\{100\}$ , а інша як  $\{010\}$ . Нормаль до грані  $(010)$  орієнтують строго направо. В цій грані лежать ребра, обрані за вертикальну вісь  $Z$  і похилу вісь  $X$ . 3) Форма  $\{001\}$ , в якій лежать осі  $X$  і  $Y$ , має бути нахилена вперед і трохи направо, якщо кут  $\beta > 90^\circ$ , а  $\gamma < 90^\circ$ . Напрямки осей  $X$  і  $Y$  – похилі та визначаються відповідно перетином  $\{010\}$  і  $\{100\}$  з  $\{001\}$ . Нормаль до грані  $\{010\}$  не збігається з віссю  $Y$ .

**1 – моноедричний (примітивний) вид.** Симетрія –  $L_1$ . Є лише поворотні осі першого порядку, що відповідає відсутності елементів симетрії.

*Прості форми.* Всі прості форми є загальними, разом із загальною формою  $\{hkl\}$ . Всі вони представлені моноедрами. Таким чином жодна грань не пов'язана з іншою. Стереограма виду показана на рис. 10.

Мінералом представником цього виду є мурманіт (титано-силікат натрію і мангану).

**$\bar{1}$  – пінакоїдальний (центральний) вид.** Симетрія –  $C$ . Єдиний елемент симетрії – це інверсійна вісь першого порядку, еквівалентна центрові симетрії, або інверсії.

*Прості форми.* Всі прості форми є пінакоїдами. Вони складені з двох однакових паралельних граней (з антипаралельними ребрами). Всі пінакоїди є загальними формами поряд із  $\{hkl\}$ . Різним пінакоїдам дають назви, які вказують на положення щодо кристалографічних осей. Окрім переднього (першого)  $\{100\}$ ,

бічного (другого) пінакоїда  $\{010\}$  і базового (третього)  $\{001\}$ , інколи використовують застарілі назви: пінакоїди першого  $\{0kl\}$ , другого  $\{h0l\}$ , третього  $\{hk0\}$  і четвертого  $\{hkl\}$  роду:

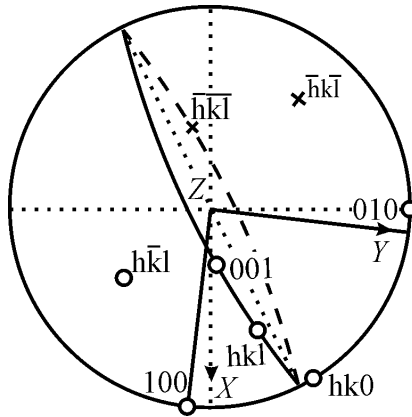


Рис. 10. Стереограма простих форм монокричного виду симетрії триклінної сингонії. Розглядається випадок, коли позитивні кінці осей  $X$  та  $Y$  орієнтовані вниз (кут  $\beta > 90^\circ$ , а  $\gamma < 90^\circ$ ), вісь  $Z$  вертикальна. Усі грані – монокристи і є загальними формами, незалежно від орієнтації й символу

1. Перший (передній), другий (бічний) пінакоїди і базопінакоїд (рис. 11, *a*). Кожен із цих пінакоїдів перетинає одну кристалографічну вісь і паралельний двом іншим. Перший, або  $a$ -пінакоїд  $\{100\}$ , перетинає вісь  $X$  і паралельний осям  $Y$  і  $Z$ . Другий, або  $b$ -пінакоїд  $\{010\}$ , перетинає вісь  $Y$ ; базальний, або  $c$ -пінакоїд  $\{001\}$ , перетинає вісь  $Z$  (рис. 11, *a*).

2. Пінакоїди першого, другого і третього роду. На рис. 11, *b–г* зображені дводиничні грані цих пінакоїдів. Для кожного з них є позитивна і негативна форми, грані яких паралельні одній кристалографічній осі та перетинають дві інші, а саме:

пінакоїд першого роду – паралельний осі  $X$ :  $\{0kl\}$  – позитивний,  $\{0\bar{k}l\}$  – негативний;

пінакоїд другого роду – паралельний осі  $Y$ :  $\{h0l\}$  – позитивний,  $\{\bar{h}0l\}$  – негативний;

пінакоїд третього роду – паралельний осі  $Z$ :  $\{hk0\}$  – позитивний,  $\{h\bar{k}0\}$  – негативний.

3. Пінакоїди четвертого роду. На рис. 11, *г* зображена комбінація пінакоїдів, яка складена одиничними гранями. Різновид  $\{hkl\}$  – позитивний правий,  $\{h\bar{k}l\}$  – позитивний лівий,

$\{hk\bar{l}\}$  – негативний правий,  $\{h\bar{k}l\}$  – негативний лівий. Кожна з цих двограних форм може існувати незалежно від інших.

Стереорама цього виду симетрії представлена на рис. 12.

Серед мінералів, котрі кристалізуються в пінакоїдальному виді симетрії, є такі: бірюза  $\text{Cu}(\text{Al,Fe}^{3+})_6(\text{OH})_8[\text{PO}_4]_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ , мікроклін  $\text{K}\{\text{AlSi}_3\text{O}_8\}$ , плагіоклази (альбіт  $\text{Na}\{\text{AlSi}_3\text{O}_8\}$ , анортит  $\text{Ca}\{\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_8\}$ ), полігаліт  $\text{K}_2\text{Ca}_2\text{Mg}[\text{SO}_4]_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  та багато інших.

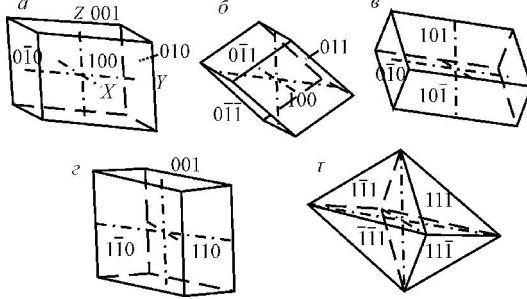


Рис. 11. Комбінації триклінних пінакоїдів: *a* – координатні пінакоїди – перший  $\{100\}$ , другий  $\{010\}$  і третій (базопінакоїд)  $\{001\}$ ; *б* – першого роду:  $\{011\}$  – позитивний,  $\{0\bar{1}1\}$  – негативний; *в* – другого роду:  $\{101\}$  – позитивний,  $\{10\bar{1}\}$  – негативний; *з* – третього роду:  $\{110\}$  – позитивний,  $\{1\bar{1}0\}$  – негативний; *r* – четвертого роду: чотири різні прості форми – дві позитивні (верхні) та дві негативні (нижні)

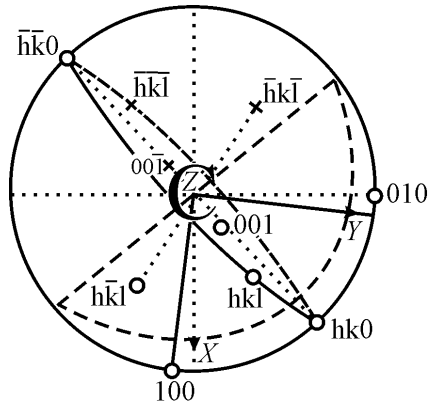


Рис. 12. Стереорама простих форм і елементів симетрії пінакоїдального виду симетрії триклінної сингонії. Розглядається випадок, коли позитивні кінці осей *X* та *Y* орієнтовані вниз (кут  $\beta > 90^\circ$ , а  $\gamma < 90^\circ$ ), вісь *Z* вертикальна. Прості форми:  $\{001\}$  – базопінакоїд;  $\{100\}$  і  $\{010\}$  – перший і другий пінакоїди;  $\{hk0\}$  – пінакоїд третього роду;  $\{hkl\}$  – позитивний правий пінакоїд четвертого роду;  $\{h\bar{k}l\}$  – позитивний лівий пінакоїд четвертого роду

**МОНОКЛІННА СИНГОНІЯ.** *Установка.* У кристалах моноклінної сингонії за вісь  $Y$  обирають  $L_2$  або нормаль до площини симетрії. За вісь  $Z$  обирають вісь добре розвиненого поясу. Вісь  $X$  орієнтується косо у площині  $(010)$ , оскільки кут  $\beta \neq 90^\circ$  (рис. 18). Нормаль до грані  $(010)$  збігається з віссю  $Y$ .

**$2/m$  – ромбопризматичний (планаксіальний) вид.**

*Симетрія:*  $L_2PC$ .  $L_2$  орієнтується строго праворуч нормально до  $P$ .

*Прості форми.* У ромбопризматичному виді симетрії моноклінної сингонії є тільки два типи простих форм: власні – пінакоїди та загальні – ромбічні призми.

1. Пінакоїди. Серед координатних пінакоїдів (рис. 13) розрізняють:

перший (передній), або  $a$ -пінакоїд  $\{100\}$  (перетинає вісь  $X$ , паралельний осям  $Y$  і  $Z$ );

другий (бічний), або  $b$ -пінакоїд  $\{010\}$  (перетинає вісь  $Y$ , паралельний осям  $X$  і  $Z$ );

третій (базальний), або  $c$ -пінакоїд  $\{001\}$  (перетинає вісь  $Z$ , паралельний осям  $X$  і  $Y$ ).

Пінакоїди другого роду (паралельні осі  $Y$  – рис. 13, 14): позитивні  $\{h0l\}$ , негативні  $\{\bar{h}0l\}$ . Ілюструють їхні дводиничні різновиди  $\{101\}$  і  $\{\bar{1}01\}$  (рис. 13, 14).

Пінакоїди  $\{h0l\}$  містяться між  $\{100\}$  і  $\{001\}$ , а  $\{\bar{h}0l\}$  – між  $\{\bar{1}00\}$  і  $\{001\}$ . Слід підкреслити, що ці дві форми взаємно не пов'язані елементами симетрії, а наявність однієї не потребує наявності іншої (рис. 14 і 15).

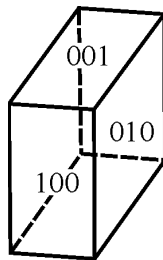


Рис. 13. Моноклінні координатні пінакоїди: перший (передній)  $\{100\}$ , другий (бічний)  $\{010\}$ , третій (базальний)  $\{001\}$ . Осі  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  лежать на перетині цих граней



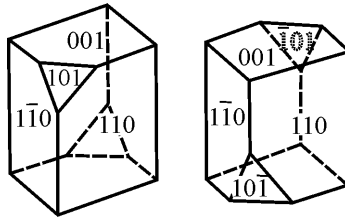


Рис. 14. Дводиничні пінакоїди другого роду:  $\{101\}$  – позитивний,  $\{\bar{1}01\}$  – негативний у комбінації з вертикальною призмою  $\{110\}$  і базопінакоїдом  $\{001\}$

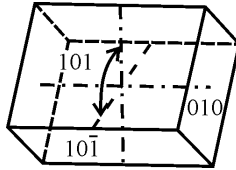


Рис. 15. Позитивний  $\{101\}$  і негативний  $\{10\bar{1}\}$  дводиничні пінакоїди другого роду в комбінації з другим пінакоїдом  $\{010\}$

2. Ромбічні призми. Всі ромбічні призми є загальними формами. Серед ромбічних призм розрізняють загальні звичайні форми  $\{hkl\}$  і загальні з власним типом символів  $\{0kl\}$  і  $\{hk0\}$ . Грані похилих призм першого роду  $\{0kl\}$  перетинають осі  $Y, Z$  і паралельні осі  $X$  (рис. 16).

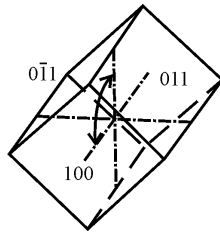


Рис. 16. Похила дводинична ромбічна призма першого роду  $\{011\}$  в комбінації з першим пінакоїдом  $\{100\}$

Грані вертикальних призм третього роду  $\{hk0\}$  (рис. 17) перетинають осі  $X, Y$  і паралельні осі  $Z$ .

Ромбічні призми четвертого роду  $\{hkl\}$  – позитивні,  $\{\bar{h}\bar{k}\bar{l}\}$  – негативні. Грані цих двох незалежних форм перетинають всі три кристалографічні осі. Якщо грані призм у верхній частині кристала перетинають додатний кінець осі  $X$ , то призма позитивна, а якщо вони перетинають від’ємний кінець осі  $X$ , то призма негативна (рис. 17).

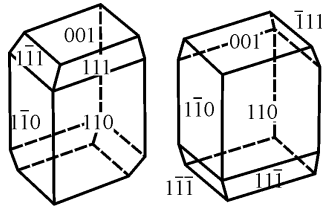


Рис. 17. Призми четвертого роду:  $\{111\}$  – позитивна,  $\{11\bar{1}\}$  – негативна (в комбінації з призмою третього роду  $\{110\}$  і базопінакоїдом  $\{001\}$ )

Єдина фіксована форма у цьому класі – це другий пінакоїд  $\{010\}$ . Інші форми можуть змінювати назви і символи залежно від вибору осей  $X$  і  $Z$ . Наприклад, перший пінакоїд, базопінакоїд і пінакоїд другого роду можуть переходити один в одного при поворотах навколо осі  $Y$ . Таким же чином різновиди трьох призм унаслідок такого повороту можуть змінювати свої назви і символи. Стереорама ромбопризматичного виду симетрії представлена на рис. 18.

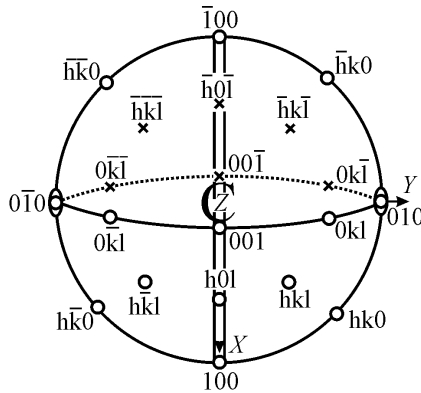


Рис. 18. Стереорама простих форм і елементів симетрії ромбопризматичного виду симетрії моноклінної сингонії. Розглядається випадок, коли позитивний кінець осі  $X$  орієнтований вниз (кут  $\beta > 90^\circ$ ). Прості форми:  $\{100\}$  – перший пінакоїд,  $\{010\}$  – другий пінакоїд,  $\{001\}$  – третій (базальний) пінакоїд, або базопінакоїд. Звертаємо увагу на те, що ця форма орієнтована не горизонтально, а похило, бо кут  $\beta \neq 90^\circ$ .  $\{h0l\}$  – пінакоїд другого роду,  $\{hk0\}$  – ромбічна призма третього роду,  $\{0kl\}$  – ромбічна призма першого роду,  $\{hkl\}$  – ромбічна призма четвертого роду

Багато мінералів кристалізується в ромбопризматичному виді симетрії моноклінної сингонії, серед них – азурит  $\text{Cu}_3(\text{OH})_2[\text{CO}_3]_2$ , ортоклаз  $\text{K}\{\text{AlSi}_3\text{O}_8\}$ , арсенопірит  $\text{FeAsS}$ , гіпс  $\text{Ca}[\text{SO}_4]\cdot 2\text{H}_2\text{O}$ , діопсид  $\text{CaMg}[\text{Si}_2\text{O}_6]$  та інші клінопіроксени й рогові обманки.

**2 – дієдрично-осьовий (аксіальний) вид.** *Симетрія:*  $L_2$ . Кристалографічна вісь  $Y$  – паралельна  $L_2$ . Вони зорієнтовані строго направо.

*Прості форми.* За відсутності площини симетрії, паралельної осям  $X$  і  $Z$ , вісь  $Y$  полярна, і біля протилежних її кінців розташовані два моноедри  $\{010\}$  і  $\{0\bar{1}0\}$  (рис. 19). Аналогічно в першій, третій і четвертій позиціях попарно розташовані енантіоморфні праві й ліві різновиди осьових дієдрів. Осьовий дієдр (сфеноїд) – це двогранна форма, симетрична щодо подвійної поворотної осі (на противагу безосьовому дієдру, симетричному щодо площини симетрії).

Загальною формою є праві осьові дієдри  $\{hkl\}$  і ліві енантіоморфні різновиди  $\{h\bar{k}l\}$ . Решта загальних дієдричних форм є дієдрами із власним типом символів: це осьові дієдри першого роду  $\{0kl\}$ ,  $\{0\bar{k}l\}$  і третього роду  $\{hk0\}$ ,  $\{h\bar{k}0\}$ . Можливі також пінакоїди: перший  $\{100\}$  і третій  $\{001\}$  та другого роду:  $\{h0l\}$  і  $\{h\bar{0}l\}$ .

Стереограма деяких можливих простих форм дієдричного осьового виду симетрії представлена на рис. 19.

Мінерали, представлені у дієдрично-осьовому виді симетрії, є рідкісними, серед них: баритокальцит  $\text{BaCa}(\text{CO}_3)_2$ , берманіт  $\text{Mn}^{2+}\text{Mn}^{3+}_2[\text{PO}_4]_2(\text{OH})_2 \cdot 4(\text{H}_2\text{O})$ , галотрихіт  $\text{FeAl}_2[\text{SO}_4]_4 \cdot 22\text{H}_2\text{O}$ .

**$m$  – дієдрично-безосьовий (планальний) вид.** *Симетрія:*  $P$ . Одна вертикальна площина симетрії  $(010)$ , яка проходить через кристалографічні осі  $X$  і  $Z$ .

*Прості форми.* Дієдри безосьові – це двогранні форми (“дахи”), симетричні щодо вертикальної площини симетрії. Загальні форми  $\{hkl\}$  і  $\{h\bar{k}l\}$  – безосьові дієдри четвертого роду. Безосьові дієдри  $\{0kl\}$ ,  $\{0k\bar{l}\}$  і  $\{hk0\}$ ,  $\{h\bar{k}0\}$  є загальними формами з власним типом символів. Форма  $\{010\}$  – пінакоїд. А всі грані, полюси яких проєктуються на площини симетрії (такі як  $\{100\}$ ,  $\{\bar{1}00\}$ ,  $\{001\}$ ,  $\{00\bar{1}\}$  і  $\{h0l\}$ ,  $\{h\bar{0}l\}$ ), є моноедрами.

Стереограма деяких із простих форм дієдричного безосьового виду симетрії представлена на рис. 20.

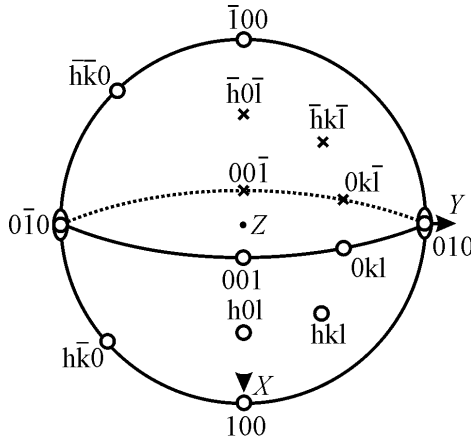


Рис. 19. Стереограма простих форм і елементів симетрії дієдричного осевого виду симетрії моноклінної сингонії. Позитивний кінець осі  $X$  зорієнтований униз (якщо кут  $\beta > 90^\circ$ ). Прості форми:  $\{010\}$  – моноедр,  $\{0\bar{1}0\}$  – моноедр,  $\{100\}$  – перший пінакоїд,  $\{001\}$  – базопінакоїд,  $\{h0l\}$  – пінакоїд другого роду,  $\{0kl\}$  – осьовий дієдр першого роду (правий),  $\{h\bar{k}0\}$  – осьовий дієдр третього роду (лівий),  $\{hkl\}$  – осьовий дієдр четвертого роду (правий)

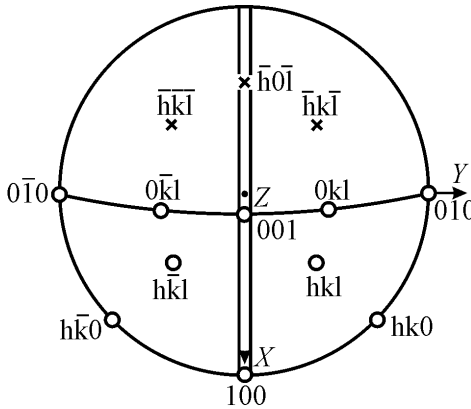


Рис. 20. Стереограма простих форм і елементів симетрії дієдричного безосьового виду симетрії моноклінної сингонії. Позитивний кінець осі  $X$  орієнтований вниз (якщо кут  $\beta > 90^\circ$ ). Прості форми:  $\{100\}$  – моноедр (перший),  $\{001\}$  – моноедр (третій),  $\{h\bar{0}\bar{1}\}$  – моноедр (другого роду),  $\{010\}$  – пінакоїд (другий),  $\{0kl\}$  – безосьовий дієдр (першого роду),  $\{hk0\}$  – безосьовий дієдр (третього роду),  $\{hkl\}$  – безосьовий дієдр (четвертого роду),  $\{h\bar{k}\bar{l}\}$  – безосьовий дієдр (четвертого роду)

У планальному виді симетрії кристалізуються антигорит  $(\text{Mg,Fe}^{2+})_3[\text{Si}_2\text{O}_5](\text{OH})_4$ , лангіт  $\text{Cu}_4(\text{SO}_4)(\text{OH})_6 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ , дикінсоніт  $\text{KNa}_4\text{Ca}(\text{Mn}^{2+},\text{Fe}^{2+})_{14}\text{Al}[\text{PO}_4]_{12}(\text{OH})_2$ .

**РОМБІЧНА СИНГОНІЯ.** *Установка.* В кристалах ромбічної сингонії за вісь  $Z$  обирають  $L_2$ , а за осі  $X$  та  $Y$  – осі  $L_2$  або нормалі до площин симетрії.

У позначеннях Германа–Могена для ромбічної сингонії враховуються три позиції, залежні від наявності або відсутності площин симетрії паралельних  $(100)$ ,  $(010)$ ,  $(001)$  або осей  $L_2$  паралельних  $[100]$ ,  $[010]$ ,  $[001]$ . Відповідно, планаксіальний вид буде  $mmm$ , аксіальний вид –  $222$ , планальний вид –  $mm(2)$ .

**$2/m\ 2/m\ 2/m$  ( $mmm$ ) – ромбодипірамідальний (планаксіальний) вид.** *Симетрія* –  $3L_23PC$ . Три кристалографічні осі  $X, Y, Z$  є подвійними осями  $L_2$  і перпендикулярно до кожної з них проходить площина симетрії.

*Прості форми.* У ромбодипірамідальному виді є три типи форм – пінакоїди, ромбічні призми і ромбічні дипіраміди.

1. Пінакоїди. Є три можливі позиції пінакоїдів. Їхні грані перетинають одну з кристалографічних осей і паралельні двом іншим (рис. 21):

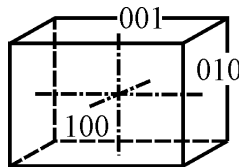


Рис. 21. Координатні ромбічні пінакоїди

перший (передній), або  $a$ -пінакоїд  $\{100\}$  – перетинає вісь  $X$  і паралельний осям  $Y$  і  $Z$ ;  
 другий (бічний), або  $b$ -пінакоїд  $\{010\}$  – перетинає вісь  $Y$  і паралельний осям  $X$  і  $Z$ ;  
 базальний, або  $c$ -пінакоїд  $\{001\}$  – перетинає вісь  $Z$  і паралельний осям  $X$  і  $Y$ .

2. Ромбічні призми. Ромбічні призми складаються з чотирьох граней, котрі паралельні одній з осей і перетинають дві інші:

призма першого роду  $\{0kl\}$ , її грані паралельні осі  $X$  і перетинають осі  $Y$  і  $Z$ ;

призма другого роду  $\{h0l\}$ , її грані паралельні осі  $Y$  і перетинають осі  $X$  і  $Z$ ;

призма третього роду  $\{hk0\}$ , її грані паралельні осі  $Z$  і перетинають осі  $X$  і  $Y$ .

Ромбічні призми кожного роду можливі з різними осьовими відрізками. На рис. 22 показані двоєдиничні форми. Оскільки всі призми перетинають дві осі та паралельні третій, то одна призма може бути перетворена в іншу зміною вибору осей.

3. Ромбічні дипіраміди  $\{hkl\}$ . Ромбічна дипіраміда має вісім неправильних трикутних граней, кожна з яких перетинає всі три кристалографічні осі. Це загальна форма, від котрої ромбодипірамідальний вид симетрії отримав свою назву. На рис. 23 представлена одинична ромбічна дипіраміда  $\{111\}$ . Всі її головні перетини – ромби.

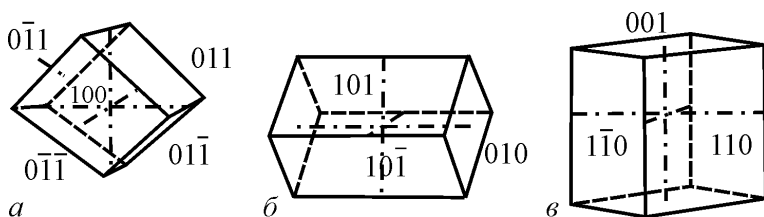


Рис. 22. Комбінації ромбічних призм із координатними пінакоїдами  $a$   $\{100\}$ ,  $b$   $\{010\}$ ,  $c$   $\{001\}$ . Показані двоєдиничні форми: першого ( $a$ ), другого ( $b$ ) і третього ( $c$ ) роду

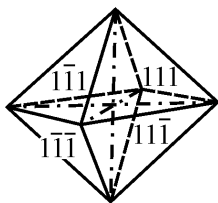


Рис. 23. Ромбічна дипіраміда

*Комбінації.* Практично всі ромбічні кристали складаються з комбінації двох або більше простих форм. Як підсумок, після характеристики простих форм ромбодипірамідального виду симетрії розглянемо стереограму зі символами граней (рис. 24).

У цьому виді симетрії є багато представників мінералів. Серед них андалузит  $\text{Al}_2\text{SiO}_5 = \text{Al}^{[6]}\text{Al}^{[5]}\text{OSiO}_4$ , англезит  $\text{PbSO}_4$ , барит  $\text{BaSO}_4$ , ангідрит  $\text{CaSO}_4$ , арагоніт  $\text{CaCO}_3$ , самородна низькотемпературна ромбічна сірка  $\text{S}_8$ , олівін  $(\text{Mg,Fe})_2\text{SiO}_4$ , топаз  $\text{Al}_2\text{SiO}_4(\text{F,OH})_2$ , гіперстен  $(\text{Mg,Fe})[\text{Si}_2\text{O}_6]$ .

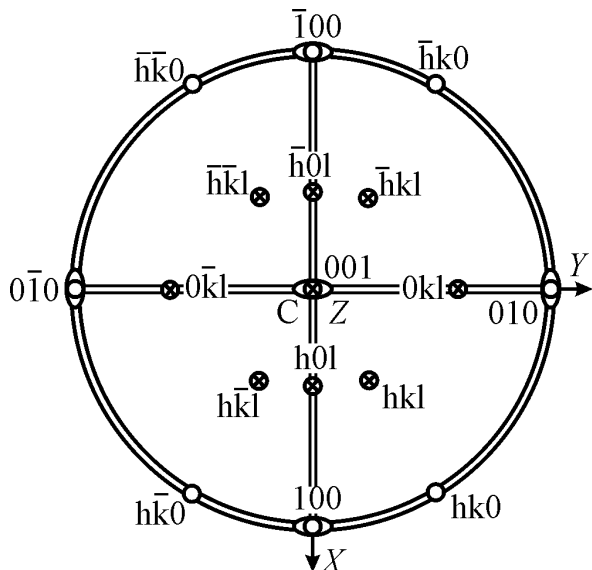


Рис. 24. Символи граней простих форм і елементів симетрії ромбодіпірамідального виду симетрії на стереограмі. Прості форми:  $\{100\}$  – перший пінакоїд (передній),  $\{010\}$  – другий пінакоїд (бічний),  $\{001\}$  – базопінакоїд (третій),  $\{0kl\}$  – ромбічна призма першого роду (горизонтальна),  $\{h0l\}$  – ромбічна призма другого роду (горизонтальна),  $\{hk0\}$  – ромбічна призма третього роду (вертикальна),  $\{hkl\}$  – ромбічна діпіраміда

**$mm2$  ( $mm$ )** – ромбодіпірамідальний (планальний) вид. Симетрія –  $L_22P$ . Кристалографічна вісь  $Z$  є поворотною віссю  $L_2$ , дві площини симетрії йдуть паралельно  $L_2$  (рис. 25).

*Прості форми.* Через відсутність горизонтальної площини симетрії верхні форми у вершині кристала відрізняються від нижніх форм у основі. Таким чином, є різні ромбічні піраміди – верхні  $\{hkl\}$  та нижні  $\{h\bar{k}\bar{l}\}$ . Аналогічно, немає призм першого і другого роду. Місце кожної з них займають два дієдри – дієдри першого роду  $\{0kl\}$ ,  $\{0k\bar{l}\}$  і другого роду  $\{h0l\}$ ,  $\{h0\bar{l}\}$ . Ці двогранні форми одночасно є і осьовими, й безосьовими (площинними) дієдрами. На додаток до цих форм є також моноедри  $\{001\}$  і  $\{00\bar{1}\}$  та призми третього роду  $\{hk0\}$ .

Стереограма та символи граней простих форм ромбодіпірамідального виду симетрії показані на рис. 25.

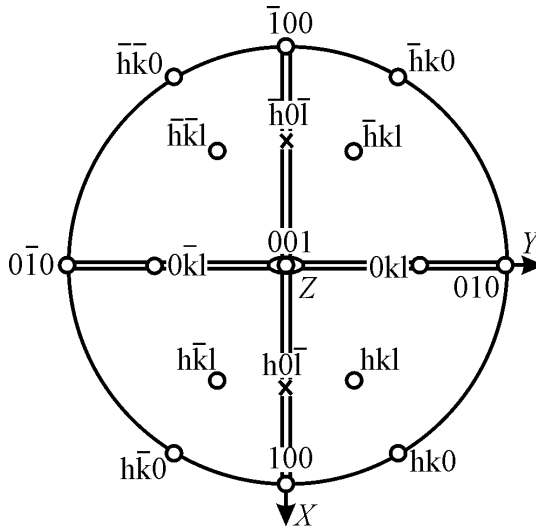


Рис. 25. Символи граней простих форм і елементи симетрії ромбопірамідального виду симетрії на стереограмі. Прості форми:  $\{001\}$  – моноедр,  $\{010\}$  – другий пінакоїд,  $\{100\}$  – перший пінакоїд,  $\{0kl\}$  – діедр першого роду,  $\{h0\bar{l}\}$  – діедр другого роду,  $\{hk0\}$  – ромбічна призма третього роду,  $\{hkl\}$  – ромбічна піраміда

У цьому виді симетрії кристалізуються такі мінерали: бертрандит  $\text{Be}_4[\text{Si}_2\text{O}_7](\text{OH})_2$ , геміморфіт  $\text{Zn}_4[\text{Si}_2\text{O}_7](\text{OH})_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$ , енаргіт  $\text{Cu}_3\text{AsS}_4$ .

**222 – ромботетраедричний (аксіальний) вид.** *Симетрія* –  $3L_2$ . Три подвійні поворотні осі збігаються з кристалографічними осями. Немає площин симетрії, немає центру симетрії.

*Прості форми.* Загальна форма – ромбічний тетраедр, який складається з чотирьох граней: двох у верхній напівсфері і двох – у нижній. Він подібний на тетрагональний тетраедр, але кожна грань – це нерівносторонній трикутник, тоді як у тетрагональному тетраедрі кожна грань є рівнобедрений трикутник. Є два типи ромбічних тетраедрів, які складають енантіоморфні пари: правий  $\{hkl\}$  і лівий  $\{hk\bar{l}\}$  різновиди. У цьому виді симетрії можуть бути три пінакоїди і три призми.

Стереограма елементів симетрії та символів граней простих форм даного виду симетрії представлена на рис. 26.

Є ряд рідкісних мінералів – представників цього класу: алоклазит  $(\text{Co},\text{Fe})\text{AsS}$ , халькоменіт  $\text{CuSeO}_3 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ . Найбільш поширеним є епсоміт  $\text{MgSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ .



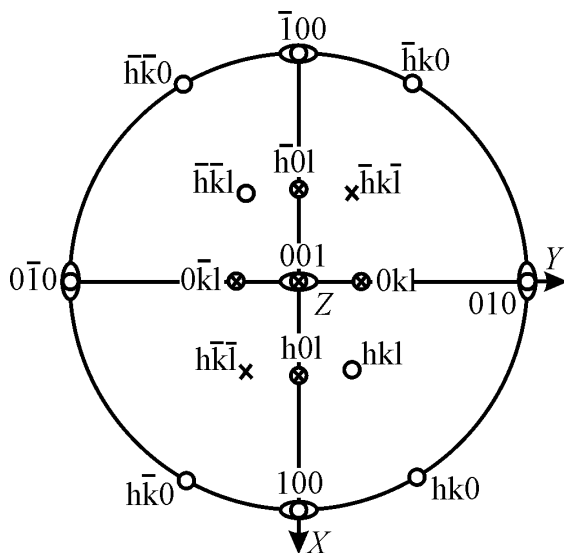


Рис. 26. Символи граней простих форм ромботетраедричного виду симетрії на стереограмі. Прості форми:  $\{001\}$  – базальний пінакоїд (базопінакоїд),  $\{010\}$  – другий пінакоїд,  $\{100\}$  – перший пінакоїд,  $\{0kl\}$  – ромбічна призма першого роду,  $\{h0l\}$  – ромбічна призма другого роду,  $\{hk0\}$  – ромбічна призма третього роду,  $\{hkl\}$  – правий ромбічний тетраедр

### Питання для самоконтролю

Як на стереограмі моноклінного кристала розташовані полюси координатних граней щодо осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  і які символи вони мають, якщо кут  $\beta > 90^\circ$ ?

Як на стереограмі розташовані полюси координатних граней щодо координатних осей у кристалах моноклінної сингонії, якщо осі  $+X$  та  $+Y$  зорієнтовані вниз, а кут  $\beta$  і кут  $\gamma > 90^\circ$ ?

Як розташовані полюси граней ромбічної піраміди і які символи вони мають, якщо відома позиція дводиничних граней  $\{101\}$  і  $\{110\}$ , наближених до  $\{h0l\}$  і  $\{hk0\}$ ? Скористайтеся стереограмою на рис. 25.

Визначте позицію та символи всіх граней правого ромбічного тетраедра  $\{111\}$ , якщо відома позиція дводиничних граней  $\{110\}$  і  $\{101\}$ , наближених до  $\{h0l\}$  і  $\{hk0\}$ . Скористайтеся стереограмою на рис. 26.

Які символи мають усі грані ромбічної дипіраміди  $\{210\}$ ? Покажіть полюси цих граней дипіраміди на стереограмі.

**ТЕМА 10**  
**ПРОЕКТУВАННЯ МОДЕЛЕЙ СЕРЕДНЬОЇ КАТЕГОРІЇ З**  
**УСТАНОВКОЮ І ВИЗНАЧЕННЯМ СИМВОЛІВ ГРАНЕЙ**  
**ПРОСТИХ ФОРМ**

*Установка.* В кристалах середньої категорії за вертикальну вісь  $Z$  обирають осі вищого порядку ( $L_3, Li_3, L_4, Li_4, L_6$  і  $Li_6$ ). За вісь  $Y$  беруть  $L_2$  або, якщо  $L_2$  немає, то нормалі до площин симетрії або, якщо немає й  $P$  – дійсні або можливі горизонтальні ребра. Вісь  $Y$  орієнтують строго направо. Кут  $\gamma$  між осями  $X$  і  $Y$  дорівнює  $90^\circ$  у тетрагональній сингонії та  $120^\circ$  у тригональній і гексагональній. Інколи при тих же осьових співвідношеннях вісь  $X$  зорієнтовують на спостерігача.

Щоби зберегти однотипність символів конкретних простих форм, у тригональній і гексагональній сингоніях, як уже згадувалося, вводиться додаткова вісь  $U$  (в позиції бісектриси між осями  $X$  та  $Y$  – в установці Браве). У разі кристалів тригональної та гексагональної сингоній введення додаткового індексу  $i$  по третій горизонтальній координатній осі  $U$  полегшує одержання символів решти граней певної простої форми. Ще раз нагадуємо, що сума індексів  $h + k + i = 0$  у чотирьох індексних символах цих граней.

На рис. 27 зображені лінії перетину граней тригональної піраміди з площиною горизонтальних осей  $X, Y$  і  $Z$ . Як видно, символи всіх трьох граней, пов'язаних віссю 3-го порядку, відрізняються лише знаком і перестановкою перших трьох індексів ( $h, k$  та  $i$ ) при постійному індексі  $l$ . Якщо визначити символ першої грані як  $(hki_l)$ , символи решти можна одержати простою перестановкою перших трьох індексів по колу:  $hki \rightarrow kih, ihk$  (де  $\rightarrow$  – знак перестановки індексів по колу). У нашому випадку (рис. 4.42) одержимо:  $(32\bar{5}1) \rightarrow (\bar{2}531), (\bar{5}321)$ . Введення третього індексу  $i$  у символах граней будь-якої простої форми виявляється зручним, оскільки після його вилучення одержимо три індекси гексагональних символів:  $(32\cdot 1), (\bar{2}\bar{5}\cdot 1), (\bar{5}\bar{3}\cdot 1)$ , за якими достатньо складно з'ясувати приналежність цих граней до однієї простої форми.

Доцільно також навести (див. табл. 2) загальні символи різновидів граней деяких простих форм у кристалах середньої категорії, розташованих у стандартних позиціях щодо горизонтальних осей.

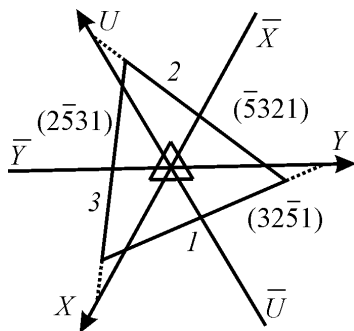


Рис. 27. Поворот по колу грані  $(32\bar{5}1)$  вертикальною віссю 3-го порядку (показано в горизонтальному перерізі): 1.  $(32\bar{5}1) \rightarrow 2. (\bar{2}531) \rightarrow 3. (\bar{5}321)$  або без третього індексу  $(32\cdot 1) \rightarrow (\bar{2}5\cdot 1) \rightarrow (\bar{5}3\cdot 1)$ ; 1, 2, 3 – лінії перетину граней тригональної піраміди з площиною горизонтальних осей  $X, Y, U$

Таблиця 2

**Символи різновидів деяких простих форм тригональних, гексагональних і тетрагональних кристалів**

Проста форма	Різнovid простої форми	Символ
Тригональна і гексагональна призма	1-го роду	$\{10\bar{1}0\}$
	2-го роду	$\{11\bar{2}0\}$
	3-го роду	$\{hk\bar{i}0\}$
Тригональні й гексагональні піраміди і дипіраміди та ромбоєдри	1-го роду	$\{h0\bar{h}l\}$
	2-го роду	$\{hh\bar{2}h\bar{l}\}$
	3-го роду	$\{hk\bar{i}l\}$
Тригональний і гексагональний трапецеєдри	Правий	$\{hk\bar{i}l\}$
	Лівий	$\{i\bar{k}\bar{h}l\}$
Тетрагональна (квадратна) призма	1-го роду	$\{110\}$
	2-го роду	$\{100\}$
	3-го роду	$\{hk0\}$
Тетрагональний (квадратний) трапецеєдр	Правий	$\{khl\}$
	Лівий	$\{hkl\}$

**ТРИГОНАЛЬНА СИНГОНІЯ**

**3 – тригонально-пірамідальний (примітивний) вид.**  
*Симетрія* –  $L_3$ . Єдиний елемент симетрії – одна потрійна поворотна вісь.

*Прості форми.* Формами загального положення є всі численні тригональні піраміди. Всі вони орієнтуються косо до  $L_3$ . Є вісім стандартних позицій полюсів тригональних пірамід третього роду

(за орієнтацією між сусідніми координатними осями  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  і діагональними лініями): чотири піраміди розташовані зверху –  $\{i\bar{k}\bar{h}l\}$ ,  $\{hk\bar{i}l\}$ ,  $\{kh\bar{i}l\}$ ,  $\{\bar{k}\bar{i}\bar{h}l\}$  (див. аналогічні позиції цих граней на рис. 49 у планаксіальному виді гексагональної сингонії) та чотири знизу (під ними). Кожна тригональна піраміда складена трьома гранями, пов'язаними між собою віссю  $L_3$ .

Крім того, можливі дві позиції тригональних пірамід першого роду (на діагональних лініях між осями  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) і дві другого роду (на осях  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ), а також подібні незалежні піраміди знизу.

Можуть бути два моноедри і кілька різних тригональних призм (1-го, 2-го і 3-го роду). Різновиди тригональних призм і пірамід наведено в табл. 2.

Здається, що поодинокі тригональні піраміди в комбінації з моноедром має більш високу симетрію дитригонально-пірамідального виду ( $3m$ ) з трьома вертикальними площинами симетрії. Істинна низька симетрія виявляється тоді, коли різні тригональні піраміди перебувають у комбінації одна з одною. Стереогруму деяких простих форм тригонально-пірамідального виду симетрії тригональної сингонії подано на рис. 28.

Мінерали – представники виду симетрії  $L_3$ : паризит-Сe  $\text{Ca}(\text{Ce},\text{La})_2[\text{CO}_3]_3\text{F}_2$ , паризит-Nd  $\text{Ca}(\text{Nd},\text{Ce},\text{La})_2[\text{CO}_3]_3\text{F}_2$ .

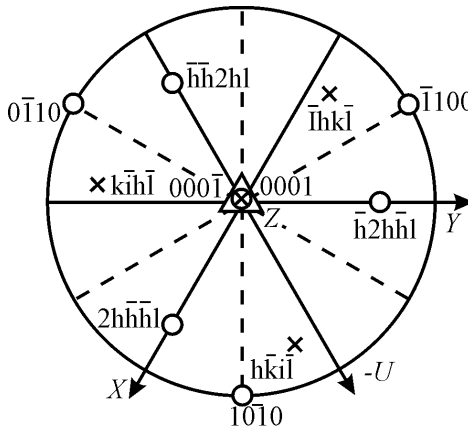


Рис. 28. Стереогрума тригонально-пірамідального виду симетрії тригональної сингонії. Прості форми:  $\{0001\}$  – моноедр,  $\{000\bar{1}\}$  – моноедр,  $\{10\bar{1}0\}$  – тригональна призма (1-го роду),  $\{2h\bar{h}h\bar{l}\}$  – тригональна піраміда (2-го роду),  $\{hk\bar{i}l\}$  – тригональна піраміда (3-го роду)

$\bar{3}$  – ромбоєдричний (центральный) вид. Симетрія –  $L_3C$ . Є одна потрійна інверсійно-поворотна вісь. Вона еквівалентна потрійній поворотній осі та центру симетрії.

*Прості форми.* Як завжди, одержуються розмноженням полюсів граней елементами симетрії. Загальними формами в цьому виді симетрії є всі численні ромбоєдри. Стосовно розташування щодо координатних осей і діагональних ліній розрізняють чотири стандартні верхні орієнтації ромбоєдрів третього роду ( $\{i\bar{k}\bar{h}l\}$ ,  $\{hk\bar{i}l\}$ ,  $\{k\bar{h}\bar{i}l\}$ ,  $\{\bar{k}i\bar{h}l\}$ ) і чотири нижніх (під ними). Але в нестандартних загальних позиціях (на координатних осях і діагональних лініях) також розташовані ромбоєдри.

Якщо на кристалі тільки один із ромбоєдрів, то морфологічна уявна його симетрія буде  $\bar{3}2/m$  ( $\bar{3}m$ ). Істинна симетрія стає очевидною лише в комбінації з іншими простими формами. Можуть бути також базальний пінакоїд  $\{0001\}$ , гексагональні призми (першого  $\{10\bar{1}0\}$  і другого  $\{11\bar{2}0\}$  роду) та гексагональні призми третього роду  $\{hk\bar{i}0\}$ ,  $\{i\bar{k}\bar{h}0\}$ , розташовані поруч із бісектрисами осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Стереограма деяких простих форм ромбоєдричного виду симетрії показана на рис. 29.

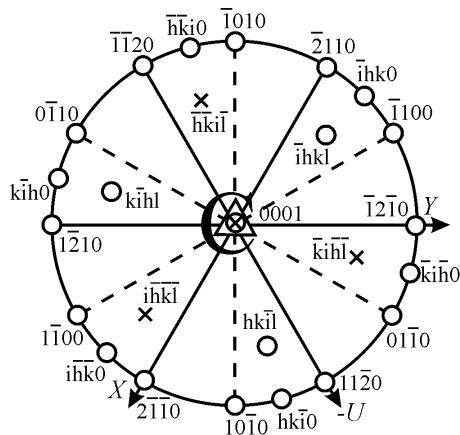


Рис. 29. Стереограма деяких простих форм ромбоєдричного виду симетрії тригональної сингонії (установка Браве). Прості форми:  $\{0001\}$  – базопінакоїд,  $\{10\bar{1}0\}$  – гексагональна призма (1-го роду),  $\{11\bar{2}0\}$  – гексагональна призма (2-го роду),  $\{hk\bar{i}0\}$  – гексагональна призма (3-го роду),  $\{hk\bar{i}l\}$  – ромбоєдр (3-го роду)

Мінерали, які кристалізуються в центральному виді симетрії, – фенакіт  $\text{Be}_2\text{SiO}_4$ , вілеміт  $\text{Zn}_2\text{SiO}_4$ , діоптаз  $\text{Cu}_6[\text{Si}_6\text{O}_{18}] \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ , доломіт  $\text{CaMg}(\text{CO}_3)_2$ , ільменіт  $\text{Fe}^{2+}\text{TiO}_3$  та інші.

**3т** – дитригонально-пірамідальний (планальний) вид. Симетрія –  $L_33P$ . Вертикальна вісь  $Z$  паралельна осі  $L_3$ , а три дзеркальні площини симетрії перетинаються вздовж цієї осі (рис. 30).

*Прості форми.* Формою загального положення є дитригональні піраміди. Можливі чотири стандартні загальні орієнтації дитригональних пірамід (між координатними осями й діагональними лініями). Попарні грані двох позитивних різновидів дитригональних пірамід мають символи (з індексами  $\{i \bar{k} \bar{h} l\}$  та  $\{h k \bar{i} l\}$ ) (рис. 30) і  $\{k h \bar{i} l\}$  та  $\{\bar{k} i \bar{h} l\}$ . Ці позиції зображені на рис. 49 гексагональної стереограми. Під ними розташовані дві негативні дитригональні піраміди.

Можуть бути й інші форми: два моноедри, *гексагональна* призма і піраміда другого роду, *тригональні* піраміди та призми. Є чотири різні позиції тригональних пірамід: дві позитивні форми мають символи  $\{h0\bar{h}l\}$  та  $\{0h\bar{h}l\}$  (їх полюси розташовані на сусідніх площинах симетрії). Дві інші тригональні піраміди розташовані під ними. Також є дві тригональні призми першого роду  $\{10\bar{1}0\}$  і  $\{01\bar{1}0\}$  та дві дитригональні призми  $\{hk\bar{i}0\}$  і  $\{kh\bar{i}0\}$  поблизу сусідніх площин симетрії. Стереограму дитригонально-пірамідального виду симетрії показано на рис. 30.

Мінерали, які кристалізуються у планальному виді симетрії: червоні срібні руди (піраргірит  $\text{Ag}_3[\text{SbS}_3]$  та прустит  $\text{Ag}_3[\text{AsS}_3]$ ), а також турмаліни (шерл  $\text{NaFe}_3\text{Al}_6(\text{BO}_3)_3[\text{Si}_6\text{O}_{18}](\text{OH},\text{F})_4$ , дравіт  $\text{NaMg}_3\text{Al}_6(\text{BO}_3)_3[\text{Si}_6\text{O}_{18}](\text{OH},\text{F})_4$ , ельбаїт  $\text{Na}(\text{Li},\text{Al})_3\text{Al}_6(\text{BO}_3)_3[\text{Si}_6\text{O}_{18}](\text{OH},\text{F})_4$ ).

**32** – тригонально-трапецедричний (аксіальний) вид. Симетрія –  $L_33L_2$ . Вертикальна кристалографічна вісь  $Z$  – це потрійна поворотна вісь, а три горизонтальні кристалографічні осі – це подвійні поворотні осі  $L_2$  (рис. 31).

*Прості форми.* Форми загального положення – тригональні трапецедри. Є чотири різновиди тригональних трапецедрів у стандартних загальних чотирьох позиціях. Вони розташовані між  $L_2$  та діагональними (бісектрисними) лініями. Кожен складається з шести граней (трьох верхніх і трьох нижніх) у вигляді трапец (не трапецій!). Ці різновиди тригональних трапецедрів мають такі

символи: позитивний правий  $\{hk\bar{l}\}$ , позитивний лівий  $\{i\bar{k}h\}$ , негативний правий  $\{i\bar{k}h\bar{l}\}$ , негативний лівий  $\{hk\bar{i}l\}$ . Ці форми можна згрупувати у дві енантіоморфні пари, кожна з правою і лівою формою. Можуть бути й інші форми: пінакоїд, гексагональна призма першого роду  $\{10\bar{1}0\}$ , дитригональні призми  $\{hk\bar{i}0\}$  і  $\{i\bar{k}h\bar{0}\}$  (див. ці позиції на рис. 49) і ромбоєдри: позитивні  $\{h0\bar{h}l\}$  та негативні  $\{0h\bar{h}l\}$ . Неможлива гексагональна призма другого роду, але замість неї стають можливими дві тригональні призми  $\{11\bar{2}0\}$  і  $\{2\bar{1}10\}$  (на виходах  $L_2$ ). Аналогічно неможлива гексагональна дипіраміда другого роду, але в її позиції можливі дві тригональні дипіраміди  $\{hh2\bar{h}l\}$  і  $\{2h\bar{h}h\}$ .

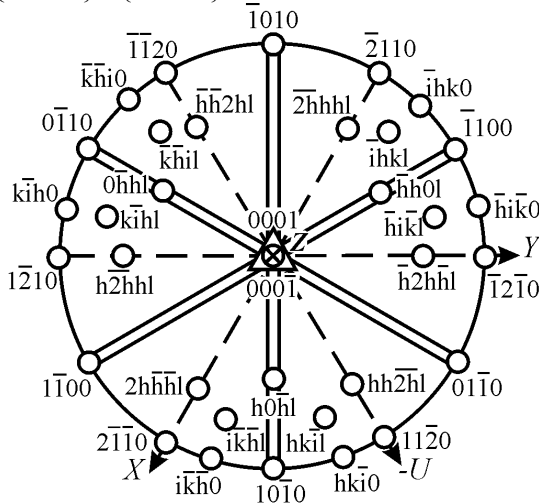


Рис. 30. Стереограма деяких простих форм дитригонально-пірамідального виду симетрії тригональної сингонії. Прості форми:  $\{0001\}$  – моноєдр,  $\{000\bar{1}\}$  – моноєдр,  $\{h0\bar{h}l\}$  – тригональна піраміда (1-го роду),  $\{10\bar{1}0\}$  – тригональна призма (1-го роду),  $\{01\bar{1}0\}$  – тригональна призма (1-го роду),  $\{hh2\bar{h}l\}$  – гексагональна піраміда (2-го роду),  $\{11\bar{2}0\}$  – гексагональна призма (2-го роду),  $\{hk\bar{i}0\}$  – дитригональна призма (3-го роду),  $\{i\bar{k}h\bar{l}\}$  – дитригональна піраміда (3-го роду)

Стереограма деяких простих форм тригонально-трапецеєдричного виду симетрії тригональної сингонії представлена на рис. 31.





двох форм у комбінації показане на рис. 32. Ромбоедр можна уявити собі як куб, деформований у напрямку однієї з чотирьох  $L_3$ . Деформація може виглядати або як витягування вздовж  $L_3$ , яке призводить до гострого привершинного кута, або як стиснення вздовж  $L_3$ , яке породжує тупий привершинний кут. Відповідно ромбоедр називають гострим або тупим.

За умов відповідного орієнтування на спостерігача повернена одна з граней позитивного ромбоедра або одне з ребер негативного ромбоедра. Різні ромбоедри відрізняються один від одного нахилом їх граней до осі  $Z$ . Символ одиничного позитивного ромбоедра –  $\{10\bar{1}1\}$ , а одиничного негативного ромбоедра –  $\{01\bar{1}\bar{1}\}$  (рис. 33).

Найпоширенішими представниками цього виду симетрії є кальцит  $\text{CaCO}_3$  і корунд  $\text{Al}_2\text{O}_3$ . Щоби визначити правильне орієнтування кристалів кальциту, можна скористатись орієнтацією його спайності по ромбоедру  $\{10\bar{1}1\}$ . А правильне орієнтування корунду визначається його двійниковою ромбоедричною окремістю по  $\{10\bar{1}1\}$  (дивиться на спостерігача).

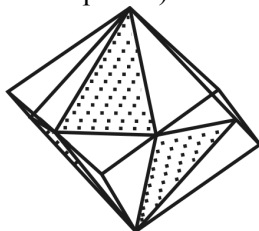


Рис. 32. Взаємозв'язок між двома ромбоедрами (позитивним і негативним) у комбінації, яка нагадує гексагональну дипіраміду першого роду. Позиція позитивного ромбоедра виділена крапом і лініями ребер

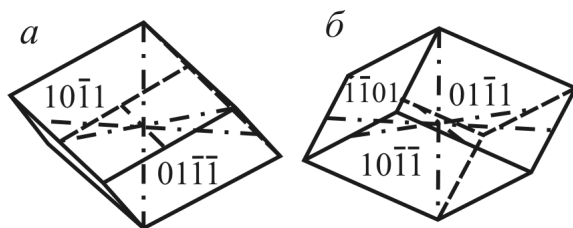


Рис. 33. Ромбоедри: *a* – позитивний, *б* – негативний. На стереограмі їхні полюси завжди розташовані на площинах симетрії

Повногранними формами у планаксіальному виді тригональної сингонії є *тригональні (дитригональні) скаленоедри*: позитивні

$\{hk\bar{l}\}$  і негативні  $\{k\bar{h}l\}$ . Вони складаються з 12 нерівносторонніх трикутних граней (скален), які в комбінації нагадують чергування пар верхніх і нижніх граней дигексагональної дипіраміди (рис. 34). Поширені тригональні (дитригональні) скаленоедри – позитивні  $\{21\bar{3}1\}$  та негативні  $\{12\bar{3}1\}$  (рис. 35, *а*, *б*).

На кристалах кальциту найчастіше спостерігаються позитивний скаленоедр  $\{21\bar{3}1\}$  (рис. 35, *а*) або комбінація гексагональної призми  $\{10\bar{1}0\}$  з пінакоїдом  $\{0001\}$ . У папіршпаті (морфологічній відміні кальциту) головною формою є пінакоїд  $\{0001\}$ .

Стереограма тригонально-скаленоедричного виду симетрії наведена на рис. 36.

Мінерали, які кристалізуються в планаксіальному виді симетрії: корунд  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , гематит  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , кальцит  $\text{CaCO}_3$ , магнезит  $\text{MgCO}_3$ , родохрозит  $\text{MnCO}_3$ , сидерит  $\text{Fe}^{2+}\text{CO}_3$ , смітсоніт  $\text{ZnCO}_3$ .

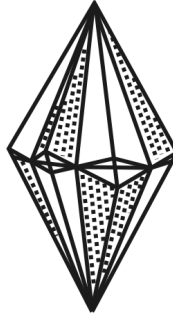


Рис. 34. Взаємозв'язок орієнтації граней уявної дигексагональної дипіраміди з гранями позитивного і негативного (помічений крапом) тригональних скаленоедрів

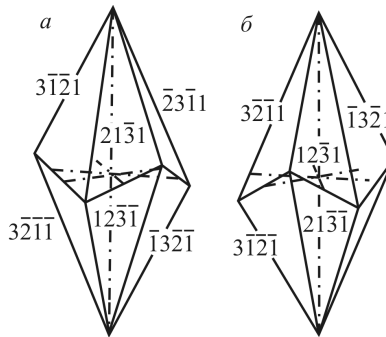


Рис. 35. Дитригональні скаленоедри: *а* – позитивний, *б* – негативний

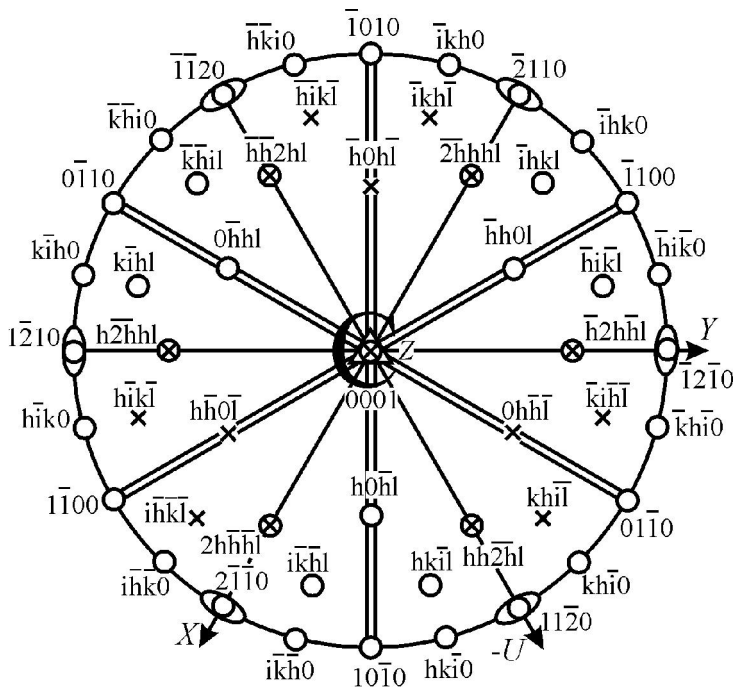


Рис. 36. Стереограма тригонально-скаленоедричного виду симетрії тригональної сингонії. Прості форми:  $\{0001\}$  – базопінакоїд,  $\{10\bar{1}0\}$  і  $\{11\bar{2}0\}$  – гексагональні призми,  $\{hk\bar{i}0\}$  – дигексагональна призма,  $\{hh\bar{2}h\ l\}$  – гексагональна дипіраміда,  $\{h0\bar{h}\ l\}$  – позитивний ромбоєдр,  $\{hki\ l\}$  – тригональний скаленоєдр

**ТЕТРАГОНАЛЬНА СИНГОНІЯ.** До тетрагональної сингонії належать кристали, в яких за вісь  $Z$  обирають  $L_4$  або  $Li_4$ , а за осі  $X$  та  $Y$  –  $L_2$  або  $\perp P$ , або дійсні чи можливі ребра.

Розглянемо зміну символів граней тетрагональної піраміди  $\{123\}$  під час її повороту навколо осі  $L_4$ . Розглядатимемо сліди граней тетрагональної піраміди, показані на рис. 37 у вигляді ліній її перетину з площиною горизонтальних осей  $X$  і  $Y$ . Оскільки нахил щодо осі  $Z$  всіх чотирьох граней тетрагональної піраміди буде однаковий, то й відповідний третій індекс  $l$  у їхніх символах  $\{hkl\}$  буде постійний (наприклад,  $l = 3$ ). А індекси  $h$  і  $k$  (при кожному повороті за годинниковою стрілкою на  $90^\circ$ ) міняються місцями й по чергово другий індекс у новому символі одержує протилежний знак:  $(123)$ ,  $(2\bar{1}3)$ ,  $(\bar{1}23)$ ,  $(\bar{2}13)$  (рис. 37). Як видно, кожний символ,

взятий у круглі дужки, належить до певної грані даної простої форми.

Якщо символом однієї грані потрібно охарактеризувати весь набір симетрично еквівалентних граней, що належать одній простій формі, то символ однієї з граней (звичайно тієї, що перетинає координатні осі в позитивних секторах) записують у фігурних дужках: наприклад, символом всіх граней цієї тетрагональної піраміди буде  $\{123\}$  (на рис. 37 зображені сліди перетину граней площиною  $(001)$ ).

Інший приклад зміни символів граней під дією  $L_4$  у загальній формі буде  $(hkl)$ ,  $(k\bar{h}l)$ ,  $(\bar{h}k\bar{l})$ ,  $(\bar{k}hl)$  або в одного з відповідників у конкретній формі  $(321)$ ,  $(2\bar{3}1)$ ,  $(\bar{3}2\bar{1})$ ,  $(\bar{2}13)$ .

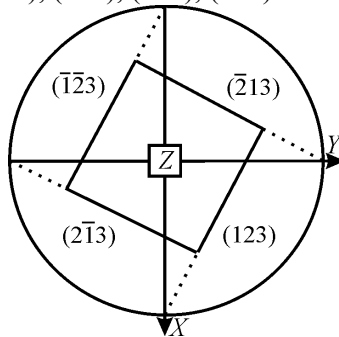


Рис. 37. Зміна порядку розташування індексів і їхніх знаків у символах граней тетрагональної піраміди  $\{123\}$  при повороті навколо вертикальної осі  $L_4$ . Зображені сліди перерізу граней горизонтальною площиною

**$4/m 2/m 2/m$  ( $4/m\bar{3}m$ ) – дитетрагонально-дипірамідальний (планаксіальний) вид.** Симетрія –  $L_44L_25PC$ . Вертикальна кристалографічна вісь  $Z$  паралельна  $L_4$ . Є чотири горизонтальні подвійні осі, дві з яких збігаються з кристалографічними осями  $X$  та  $Y$ , а дві інші розміщені під кутом  $45^\circ$  до них. Є п'ять дзеркальних площин симетрії – одна горизонтальна і чотири вертикальних. У кожній вертикальній дзеркальній площині лежить горизонтальна вісь симетрії  $L_2$  (рис. 40).

*Прості форми.* Формою загального положення є дитетрагональна дипіраміда. Серед власних форм наявні такі:

1. Базопінакоїд  $\{001\}$ . Форма складається з 2 горизонтальних граней. У комбінації з різними призмами вона показана на рис. 38.

2. Тетрагональна призма першого роду  $\{110\}$  складається з 4 прямокутних вертикальних граней, кожна з яких однаково перетинає обидві горизонтальні кристалографічні осі (рис. 38, *a*).

3. Тетрагональна призма другого роду  $\{100\}$  складається з 4 прямокутних вертикальних граней, кожна з яких перетинає одну горизонтальну кристалографічну вісь і паралельна двом іншим осям. Ця форма представлена на рис. 38, *б*.

4. Дитетрагональна призма  $\{hk0\}$  складається з 8 попарносиметричних вертикальних граней, полюси яких лежать у позиціях між тетрагональними призмами першого та другого роду: залежно від різного положення щодо горизонтальних осей є різні дитетрагональні призми. Одна з них, представлена на рис. 38, *в*, має символ  $\{210\}$ .

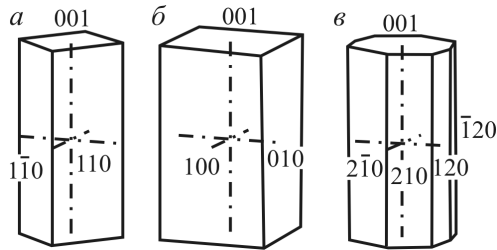


Рис. 38. Тетрагональні призми: *a* – першого роду; *б* – другого роду; *в* – дитетрагональна

5. Тетрагональні дипіраміди першого роду  $\{hhl\}$  мають 8 рівнобедрених трикутних граней (4 зверху і 4 знизу), кожна з яких перетинає всі три кристалографічні осі з рівними відрізками по обох горизонтальних осях. Залежно від нахилу граней до осі *Z* є різні тетрагональні піраміди першого роду  $\{hhl\}$ . Найбільш звичайною є одинична тетрагональна дипіраміда  $\{111\}$  (рис. 39, *a*), грані якої перетинають всі осі на одиничній відстані від початку координат. Індeksi інших тетрагональних пірамід першого роду такі:  $\{221\}$ ,  $\{331\}$ ,  $\{112\}$ ,  $\{113\}$  і т.д. або у загальному вигляді  $\{hhl\}$ .

6. Тетрагональні дипіраміди другого роду  $\{h0l\}$  складаються з 8 рівнобедрених трикутних граней, кожна з яких перетинає одну горизонтальну й одну вертикальну кристалографічні осі та паралельна іншій горизонтальній осі. У відповідності з різними параметричними відрізками на вертикальній осі є різні дипіраміди другого роду. Найбільш звичайною є дводинична дипіраміда  $\{101\}$  (рис. 39, *б*). Інші дипіраміди другого роду мають індeksi  $\{201\}$ ,  $\{301\}$ ,  $\{102\}$ ,  $\{103\}$  або в загальному вигляді  $\{h0l\}$ .

Взаємовідношення між дипірамідами першого і другого роду аналогічні взаємовідношенням між призмами першого і другого роду.

Загальним правилом є позначення єдиної наявної дипіраміди як дипіраміди першого роду, якщо немає інших критеріїв. Якщо наявні дві дипіраміди різного роду, то більш розвиненою вважається дипіраміда першого роду.

7. Дитетрагональна дипіраміда  $\{hkl\}$  має горизонтальний перетин у вигляді дитетрагона і складається з 16 неправильних трикутних граней, кожна з яких перетинає всі три кристалографічні осі та зрізає обидві горизонтальні осі на різній довжині. Залежно від різних відрізків на кристалографічних осях є різні дитетрагональні дипіраміди. Одна з найбільш звичайних – це дипіраміда  $\{311\}$ , показана на рис. 39, в.

Стереограма вищеописаних простих форм разом із проекцією елементів симетрії наведена на рис. 40.

У дитетрагонально-дипірамідальному виді симетрії кристалізується низка мінералів. Головні з них – рутил  $TiO_2$ , анатаз  $TiO_2$ , каситерит  $SnO_2$ , апофіліт  $KCa_4(Si_4O_{10})_2F \cdot 8(H_2O)$ , циркон  $Zr[SiO_4]$ , фосгеніт  $Pb_2(CO_3)Cl_2$ .

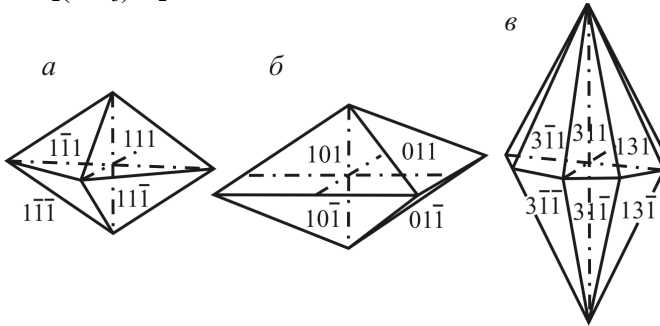


Рис. 39. Тетрагональні дипіраміди: *a* – першого роду (одиночна); *б* – другого роду (двоодиночна); *в* – дитетрагональна дипіраміда

**$\bar{4} 2m$  – тетрагонально-скаленоедричний (інверсійно-планальний) вид.** Симетрія –  $Li_4 2L_2 2P$ . Вертикальна кристалографічна вісь  $Z$  суміщується з  $Li_4$ , а обидві горизонтальні осі  $X$  та  $Y$  – з подвійними поворотними осями (рис. 41). Під кутом  $45^\circ$  до осей  $X, Y$  проходять дві вертикальні дзеркальні площини симетрії, які перетинаються на вертикальній осі  $Z$ .

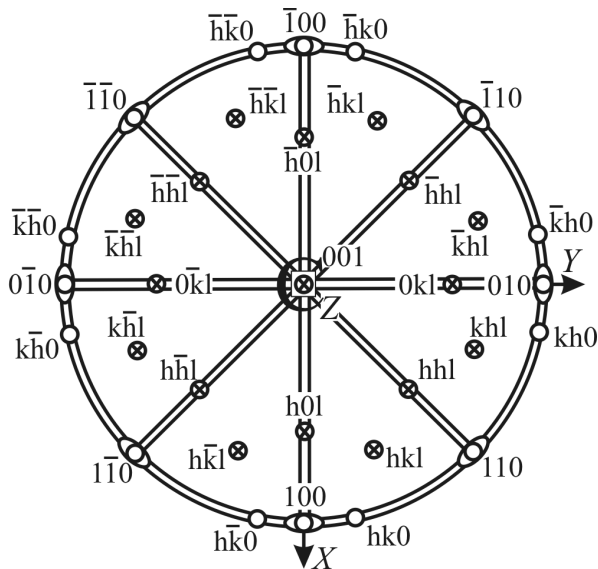


Рис. 40. Символи граней простих форм і елементи симетрії дитетрагонально-дипірамідалного виду симетрії на стереограмі. Прості форми:  $\{001\}$  – базопінакоїд,  $\{110\}$  – тетрагональна призма (першого роду),  $\{100\}$  – тетрагональна призма (другого роду),  $\{hk0\}$  – дитетрагональна призма,  $\{hhl\}$  – тетрагональна дипіраміда (першого роду),  $\{h0l\}$  – тетрагональна дипіраміда (другого роду),  $\{hkl\}$  – дитетрагональна дипіраміда

*Прості форми.* Формами загального положення є тетрагональні скаленоедри  $\{hkl\}$ . Як власні форми можуть спостерігатись тетрагональні й дитетрагональні призми і тетрагональні дипіраміди (рис. 41). Але частіше утворюються тетрагональні тетраедри позитивні  $\{hhl\}$  та негативні  $\{h\bar{h}l\}$ . Кожен із них складається з чотирьох рівнобедрених трикутників, які перетинають усі три кристалографічні осі з рівними параметричними відрізками на обох горизонтальних осях  $X$  та  $Y$ . У відповідності з можливими різними відрізками на вертикальній осі є різні тетрагональні тетраедри  $\{hhl\}$  (рис. 41). Може бути і комбінація з позитивного та негативного тетрагональних тетраедрів (рис. 41). Тетрагональні тетраедри відрізняються від тетраедра кубічного тим, що їхні параметри по вертикальній осі  $Z$  не дорівнюють параметрам по горизонтальних осях.

У тетрагонально-скаленоедричному виді симетрії кристалізується халькопірит  $\text{CuFeS}_2$ , на кристалах якого переважно буває розвинений тетрагональний тетраедр  $\{112\}$ . Цей тетрагональний

тетраедр дуже нагадує кубічний тетраедр. Потрібні точні гоніометричні заміри для того, щоби підтвердити його тетрагональну природу.

Тетрагональний скаленоедр  $\{hkl\}$ , коли трапляється сам по собі (окремо від інших простих форм), то буває огранений вісімкою однакових нерівносторонніх попарносиметричних трикутників. Але ця форма рідкісна і спостерігається лише в комбінаціях з іншими. Інші форми, які можуть бути наявні, – це пінакоїд  $\{001\}$ , тетрагональні призми першого та другого роду, дитетрагональні призми  $\{hk0\}$  і тетрагональні дипіраміди другого роду.

Стереограма елементів симетрії даного виду симетрії та простих форм зі символами граней наведена на рис. 41.

Найвідоміші мінерали, які кристалізуються в інверсійно-планальному виді симетрії, – це халькопірит  $\text{CuFeS}_2$  і станін  $\text{Cu}_2\text{FeSnS}_4$ .

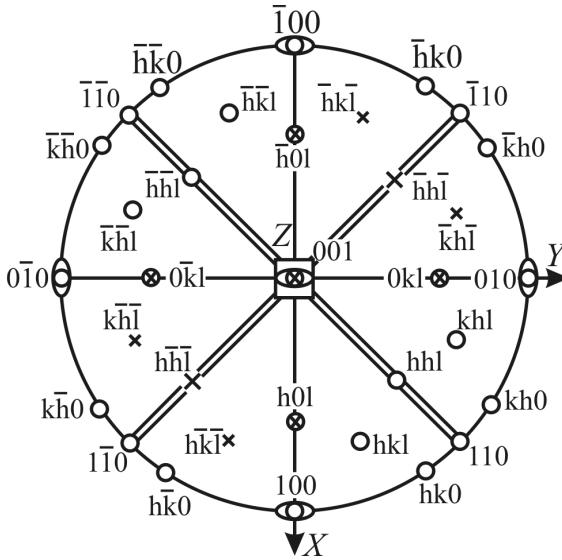


Рис. 41. Символи граней простих форм тетрагонально-скаленоедричного виду симетрії на стереограмі. Прості форми:  $\{001\}$  – базопінакоїд,  $\{110\}$  – тетрагональна призма першого роду,  $\{100\}$  – тетрагональна призма другого роду,  $\{hk0\}$  – дитетрагональна призма,  $\{h0l\}$  – тетрагональна дипіраміда другого роду,  $\{hhl\}$  – тетраедр тетрагональний (позитивний),  $\{hkl\}$  – тетрагональний скаленоедр

**$\bar{4}$  – тетрагонально-тетраедричний (інверсійно-примітивний) вид.** Симетрія –  $Li_4$ . Вертикальна вісь  $Z$  є четверною інверсійно-поворотною віссю. Інших елементів симетрії немає.



*Прості форми.* Формою загального положення є тетрагональний тетраедр  $\{hkl\}$ . Це закрита проста форма, що складається з чотирьох граней у вигляді рівнобедрених трикутників (на відміну від ромбічних тетраедрів, складених неправильними трикутниками). За відсутності граней інших простих форм на цій формі зовні начебто проявляються дві уявні вертикальні площини симетрії і  $2L_2$ , які дають симетрію  $\bar{4}2m$ . Істинна нижча симетрія очевидна лише в комбінації з іншими формами. У цьому виді симетрії можуть також бути пінакоїд і тетрагональні призми.

Прості форми тетрагонально-тетраедричного виду симетрії на стереограмі представлені на рис. 42.

Представником інверсійно-примітивного виду симетрії є рідкісний мінерал: каніт  $\text{Ca}_2[\text{AsO}_4] \cdot \text{B}(\text{OH})_4$ .

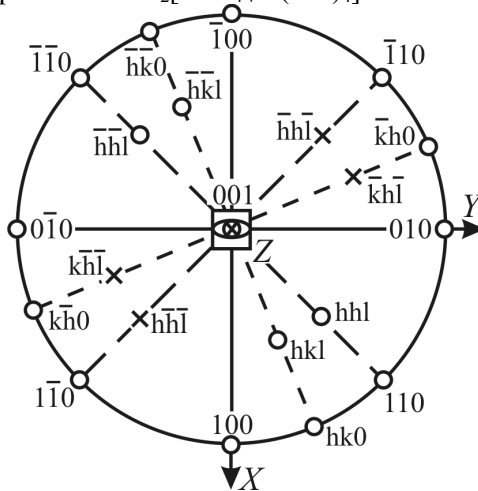


Рис. 42. Стереограма деяких простих форм тетрагонально-тетраедричного виду симетрії тетрагональної сингонії. Прості форми:  $\{001\}$  – базопінакоїд,  $\{110\}$  – тетрагональна призма (першого роду),  $\{100\}$  – тетрагональна призма (другого роду),  $\{hk0\}$  – тетрагональна призма (третього роду),  $\{hhl\}$  – тетрагональний тетраедр (першого роду),  $\{hkl\}$  – тетрагональний тетраедр (третього роду)

**4 – тетрагонально-пірамідальний (примітивний) вид.**  
*Симетрія* –  $L_4$ . Вертикальна вісь – це чотвірна поворотна вісь. Інших елементів симетрії немає.

*Прості форми.* Формами загального положення є позитивні й негативні тетрагональні піраміди. Це чотиригранні відкриті форми. Верхня проста форма  $\{hkl\}$  нееквівалентна нижній  $\{hk\bar{l}\}$ , і кожна має правий і лівий різновиди. Таким чином, є дві енантіоморфні

пари тетрагональних пірамід. Можуть також бути наявні моноедри і тетрагональні призми.

Стереограму тетрагонально-пірамідального виду симетрії тетрагональної сингонії наведено на рис. 43.

Рідкісним мінералом, який кристалізується у примітивному виді симетрії, є піноїт  $MgB_2O_4 \cdot 3(H_2O)$ .

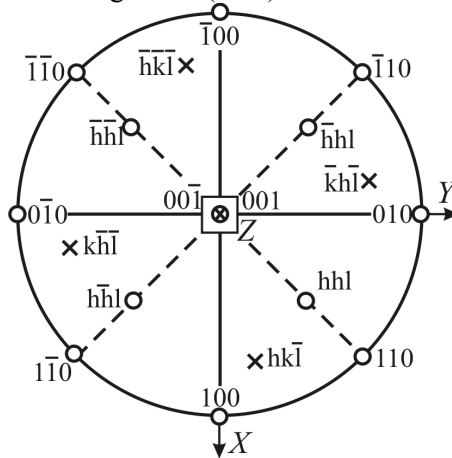


Рис. 43. Стереограма простих форм тетрагонально-пірамідального виду симетрії тетрагональної сингонії. Прості форми:  $\{001\}$  – моноедр (верхній),  $\{00\bar{1}\}$  – моноедр (нижній),  $\{110\}$  – тетрагональна призма (першого роду),  $\{100\}$  – тетрагональна призма (другого роду),  $\{hhl\}$  – тетрагональна піраміда (першого роду),  $\{hk\bar{1}\}$  – тетрагональна піраміда (нижня, третього роду)

**$4/m$  – тетрагонально-дипірамідальний (центральний) вид.**  
*Симетрія* –  $L_4PC$ . Наявні вертикальна четвірна поворотна вісь і перпендикулярна до неї площина симетрії та, відповідно, центр симетрії.

*Прості форми.* Формами загального положення є тетрагональні дипіраміди  $\{hkl\}$  та всі інші форми з похилими гранями. Це восьмигранні прості форми: чотири верхні грані яких лежать безпосередньо над чотирма нижніми гранями. Ці форми самі по собі мають більш високу *уявну* симетрію і мають бути в комбінації з іншими формами для того, щоб виявилася відсутність вертикальних площин симетрії. Можуть бути наявні також базопінакоїд  $\{001\}$  і тетрагональні призми  $\{100\}$ ,  $\{110\}$ ,  $\{hk0\}$  або  $\{kh0\}$ . Кожна із них складена чотирма гранями.

Стереограму простих форм тетрагонально-дипірамідального виду симетрії представлено на рис. 44.

Мінералами – представниками центрального виду симетрії – є скаполіт (маріаліт)  $\text{Na}_4[\text{Al}_3\text{Si}_9\text{O}_{24}]\text{Cl}$  і шееліт  $\text{CaWO}_4$ .

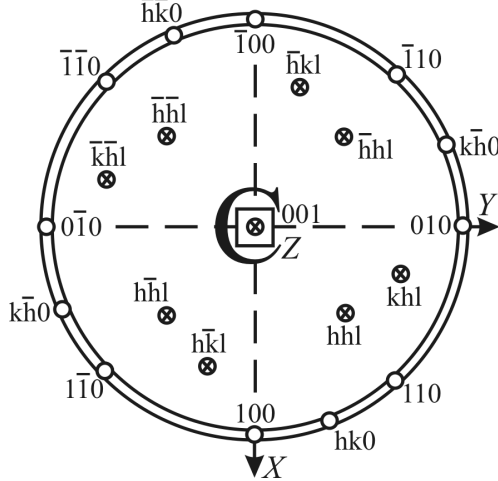


Рис. 44. Стереограма простих форм тетрагонально-дипірамідального виду симетрії тетрагональної сингонії. Прості форми:  $\{001\}$  – базопінакоїд,  $\{110\}$  – тетрагональна призма (першого роду),  $\{100\}$  – тетрагональна призма (другого роду),  $\{hk0\}$  – тетрагональна призма,  $\{hhl\}$  – тетрагональна дипіраміда (першого роду),  $\{h\bar{k}l\}$  – тетрагональна дипіраміда (третього роду)

**$4mm$  – дитетрагонально-пірамідальний (планальний) вид.**  
Симетрія –  $L_44P$ . Вертикальна вісь  $Z$  є чотвірною поворотною віссю, і є чотири дзеркальні площини симетрії, які перетинаються по цій осі.

*Прості форми.* Формами загального положення є всі дитетрагональні піраміди (верхні та нижні). Відсутність горизонтальної площини симетрії призводить до нееквівалентності простих форм у верхній і нижній половині кристалів цього класу. Можливі моноедри  $\{001\}$  і  $\{00\bar{1}\}$ . Верхні тетрагональні піраміди першого  $\{hhl\}$  і другого роду  $\{h0l\}$  не пов'язані елементами симетрії з нижніми тетрагональними пірамідами  $\{h\bar{h}\bar{l}\}$  і  $\{h0\bar{l}\}$ . Дитетрагональна піраміда  $\{hkl\}$  – це верхня (рис. 45). Поряд із дитетрагональною призмою  $\{hk0\}$  можуть бути наявні тетрагональні призми першого  $\{110\}$  і другого роду  $\{100\}$ .

Стереограму деяких простих форм даного виду симетрії представлено на рис. 45.

Мінеральним представником планального виду симетрії є відносно рідкісний мінерал: діаболіт  $\text{Pb}_2\text{CuCl}_2(\text{OH})_4$ .

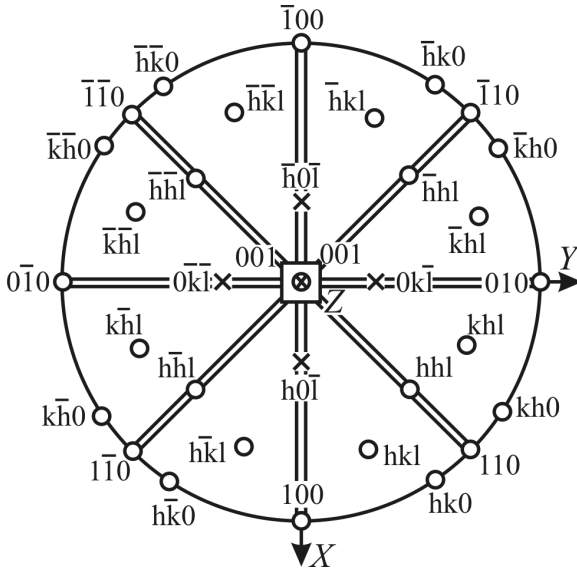


Рис. 45. Стереограма деяких простих форм дитетрагонально-пірамідального виду симетрії тетрагональної сингонії. Прості форми:

$\{001\}$  – моноedr (верхній),  $\{00\bar{1}\}$  – моноedr (нижній),  $\{110\}$  – тетрагональна призма (першого роду),  $\{100\}$  – тетрагональна призма (другого роду),  $\{hk0\}$  – дитетрагональна призма,  $\{hhl\}$  – тетрагональна піраміда (першого роду),  $\{h0\bar{l}\}$  – тетрагональна піраміда другого роду (нижня),  $\{hkl\}$  – дитетрагональна піраміда

**422 – тетрагонально-трапецедричний (аксіальний) вид.**

*Симетрія* –  $L_44L_2$ . Вертикальна вісь  $Z$  є четвірною поворотною віссю. Чотири  $L_2$  розташовані під прямим кутом до неї. Дзеркальних площин симетрії та центру симетрії немає.

*Прості форми.* Формами загального положення є всі тетрагональні трапецедри. Вони мають по вісім граней. Чотири нижні грані зміщені щодо чотирьох верхніх граней. Є позитивні енантіоморфні різновиди: праві  $\{hkl\}$  та ліві  $\{h\bar{k}l\}$  поряд із негативними лівими та правими різновидами  $\{hk\bar{l}\}$  і  $\{h\bar{k}\bar{l}\}$ . Крім них, можуть бути наявні базопінакоїд, тетрагональні призми першого  $\{110\}$  та другого роду  $\{100\}$ , дитетрагональна призма  $\{hk0\}$  і тетрагональні дипіраміди першого  $\{hhl\}$  та другого роду  $\{h0l\}$  (рис. 46).

Мінералом – представником аксіального виду симетрії є ретгерсит  $\text{NiSO}_4 \cdot 6(\text{H}_2\text{O})$ .

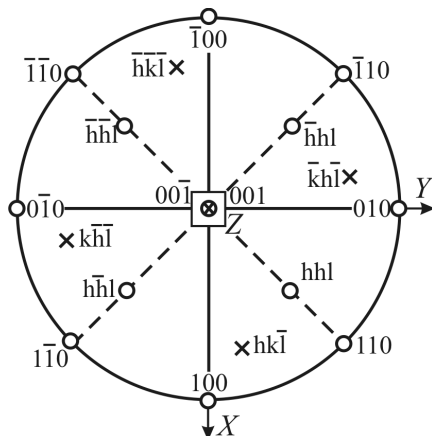


Рис. 46. Стереограма елементів симетрії та деяких простих форм тетрагонально-трапецедричного виду симетрії тетрагональної сингонії.

Прості форми:  $\{001\}$  – базопінакоїд,  $\{110\}$  – тетрагональна призма (першого роду),  $\{100\}$  – тетрагональна призма (другого роду),  $\{hk0\}$  – дитетрагональна призма,  $\{hhl\}$  – тетрагональна дипіраміда (першого роду),  $\{h0l\}$  – тетрагональна дипіраміда (другого роду),  $\{hkl\}$  – тетрагональний трапецедр (правий, позитивний)

### ГЕКСАГОНАЛЬНА СИНГОНІЯ

**$6/m\ 2/m\ 2/m$  ( $6/mmm$ ) – дигексагонально-дипірамідальний (планаксіальний) вид.** Симетрія:  $L_6L_27PC$ . Вертикальна вісь є шестірною поворотною віссю. Є шість горизонтальних осей  $L_2$ , три із них збігаються з кристалографічними осями  $X, Y, U$ , а три інші лежать у діагональній позиції посередині між ними. Є шість вертикальних площин симетрії, перпендикулярних до подвійних осей. Є горизонтальна площина симетрії, а, відповідно, й центр симетрії.

Прості форми. 1. Базопінакоїд  $\{0001\}$  – складається з 2 горизонтальних граней. У комбінації з різними призмами він показаний на рис. 47.

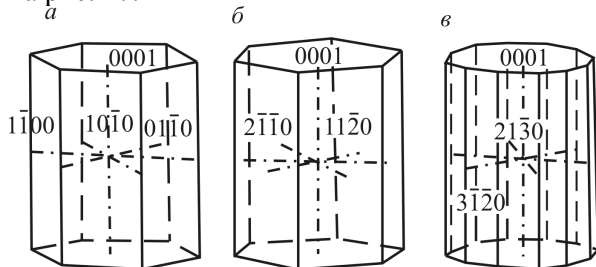


Рис. 47. Гексагональні призми: *a* – першого роду, *b* – другого роду, *v* – дигексагональна призма

2. Призма першого роду  $\{10\bar{1}0\}$  – складається з 6 вертикальних граней, кожна з яких однаково перетинає дві горизонтальні кристалографічні осі та паралельна третій (рис. 47, *a*).

3. Призма другого роду  $\{11\bar{2}0\}$ . Складається з 6 вертикальних граней, кожна з яких однаково перетинає дві з горизонтальних осей, а проміжну вісь перетинає на половині цієї відстані (рис. 47, *б*). Призми першого і другого роду – геометрично ідентичні форми, різниця між ними – лише в орієнтуванні.

4. Дигексагональна призма  $\{hk\bar{i}0\}$ . Складається з 12 вертикальних граней, кожна з яких відсікає різні відрізки на всіх трьох горизонтальних кристалографічних осях. Залежно від різного положення щодо горизонтальних осей наявні різні дигексагональні призми  $\{hk\bar{i}0\}$ . Конкретна дигексагональна призма  $\{21\bar{3}0\}$  показана на рис. 47, *в*.

5. Дипіраміда першого роду  $\{h0\bar{h}l\}$  складається з 12 рівнобедрених трикутних граней (не в комбінації з іншими формами), кожна з яких однаково перетинає якісь дві горизонтальні кристалографічні осі, паралельна іншій і перетинає вертикальну вісь. Залежно від нахилу цих граней до осі *Z* можливі різні орієнтації дипірамід першого роду. Із них одинична проста форма має символ  $\{10\bar{1}1\}$  (рис. 48, *a*).

6. Дипіраміда другого роду  $\{hh2\bar{h}l\}$ . Також складається з 12 рівнобедрених трикутних граней. Кожна грань однаково перетинає дві горизонтальні осі, а третю (проміжну горизонтальну вісь) – на половині цієї відстані. Вона перетинає також вертикальну вісь, і залежно від нахилу граней до осі *Z* можливі різні дипіраміди другого роду  $\{hh2\bar{h}l\}$ . Поширена форма (рис. 48, *б*) має символ  $\{11\bar{2}2\}$ . Співвідношення між дипірамідами першого та другого роду ті ж, що і між відповідними призмами.

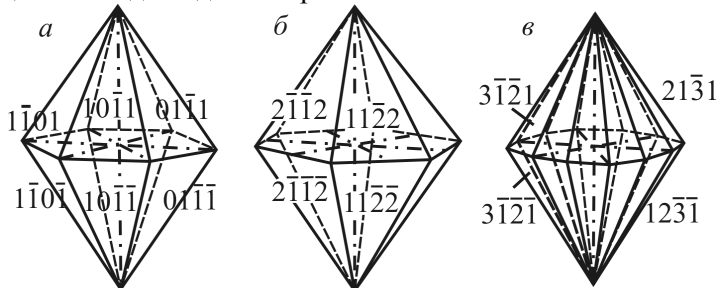


Рис. 48. Гексагональні дипіраміди: *a* – першого роду; *б* – другого роду; *в* – дигексагональна дипіраміда

Якщо на кристалі наявна лише одна дипіраміда, то вона звичайно встановлюється як піраміда першого роду. Якщо є піраміди обох родів, то за відсутності інших критеріїв більш розвиненій присвоюють перший рід. Якщо дипіраміди комбінуються з призматичними формами, то орієнтування кристала звичайно визначають за дипірамідою.

7. Дигексагональна дипіраміда  $\{hk\bar{i}l\}$ . Складається з 24 трикутних граней. Кожна грань представляє неправильний трикутник, який по-різному перетинає всі три горизонтальні осі, а також вертикальну вісь  $Z$ . Звичайна форма  $\{2\bar{1}\bar{3}1\}$  показана на рис. 48, в.

Стереограма елементів симетрії та простих форм дигексагонально-дипірамідального виду симетрії наведена на рис. 49.

Мінерали – представники дигексагонально-дипірамідального виду симетрії – графіт  $C$ , молібденіт  $MoS_2$ , нікелін  $NiAs$ , гексатроїліт  $Fe^{2+}S$ , берил  $Be_3Al_2Si_6O_{18}$ .

**$\bar{6}2m$  – дитригонально-дипірамідальний (інверсійно-планальний) вид симетрії.** Симетрія:  $Li_63L_23P$  ( $= L_33L_24P$ ). Вертикальна вісь – інверсійно-поворотна вісь  $Li_6$ , котра еквівалентна потрійній осі з горизонтальною площиною симетрії. Три площини симетрії перетинаються по вертикальній осі та паралельні осям  $L_2$  (рис. 50).

*Прості форми.* Формами загального положення є дитригональні дипіраміди  $\{hk\bar{i}l\}$ . Це 12-гранні форми, які мають 6 граней зверху кристала і 6 знизу. Можуть бути наявні додаткові форми: пінакоїд, тригональні призми другого роду  $\{11\bar{2}0\}$  і  $\{2\bar{1}\bar{1}0\}$ , гексагональна призма першого роду  $\{10\bar{1}0\}$ , дитригональні призми  $\{hk\bar{i}0\}$  і  $\{ikh\bar{0}\}$ , тригональні дипіраміди  $\{2h\bar{h}hl\}$  і  $\{hh2\bar{h}0\}$  та гексагональні дипіраміди першого роду  $\{h0\bar{h}l\}$ .

Стереограму простих форм дитригонально-дипірамідального виду симетрії подано на рис. 50.

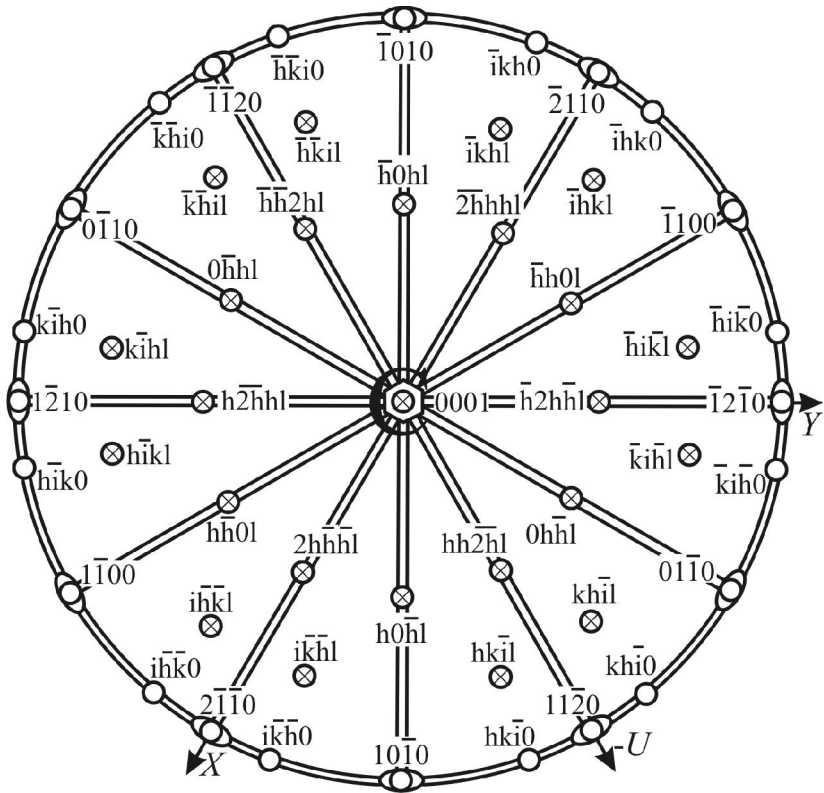


Рис. 49. Символи граней простих форм і елементи симетрії дигексагонально-дипірамідалного виду симетрії гексагональної сингонії на стереограмі (установка Браве). Прості форми:  $\{0001\}$  – базопінакоїд,  $\{10\bar{1}0\}$  – гексагональна призма (першого роду),  $\{11\bar{2}0\}$  – гексагональна призма (другого роду),  $\{hk\bar{i}0\}$  – дигексагональна призма,  $\{h0\bar{h}l\}$  – гексагональна дипіраміда (першого роду),  $\{hh\bar{2}hl\}$  – гексагональна дипіраміда (другого роду),  $\{hk\bar{i}l\}$  – дигексагональна дипіраміда

Мінерал, який кристалізується в інверсійно-планальному виді симетрії, – бенітоїт  $\text{BaTi}[\text{Si}_3\text{O}_9]$  (за назвою округу Сан-Беніто, Каліфорнія, США).



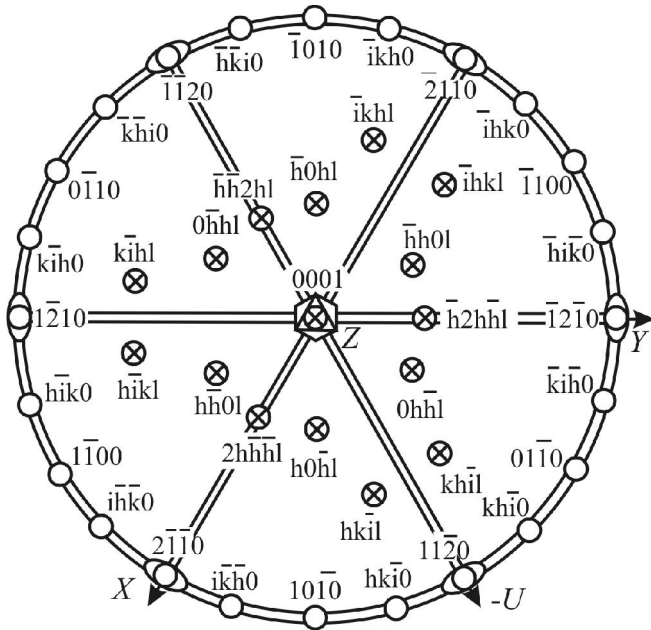


Рис. 50. Символи граней простих форм і елементи симетрії дитригонально-дипірамідального виду симетрії на стереограмі (установка Браве). Прості форми:  $\{0001\}$  – базопінакоїд,  $\{10\bar{1}0\}$  – гексагональна призма (першого роду),  $\{11\bar{2}0\}$  і  $\{2\bar{1}10\}$  – тригональні призми (другого роду),  $\{hk\bar{i}0\}$  і  $\{ikh\bar{0}\}$  – дитригональні призми,  $\{2hh\bar{h}l\}$  – тригональна дипіраміда (другого роду),  $\{h0\bar{h}l\}$  – гексагональна дипіраміда (першого роду),  $\{hk\bar{i}l\}$  – дитригональна дипіраміда

***6mm* – дигексагонально-пірамідальний (планальний) вид.**

*Симетрія:*  $L_66P$ . Найвна вісь  $L_6$  і 6 вертикальних площин симетрії, які перетинаються на цій осі.

*Прості форми.* Загальними формами є всі дигексагональні піраміди. Прості форми в дигексагонально-пірамідальному виді розташовуються подібно до верхніх або нижніх граней простих форм дигексагонально-дипірамідального виду. Але тут горизонтальної площини симетрії немає. Тому зверху і знизу кристала з'являються подібні, але нееквівалентні прості форми: дигексагональні піраміди двох типів верхні (позитивні)  $\{hk\bar{i}l\}$  та нижні (негативні)  $\{hk\bar{i}\bar{l}\}$ . Типовими є гексагонально-пірамідальні форми: верхні  $\{h0\bar{h}l\}$  та нижні  $\{h0h\bar{l}\}$ ; верхні  $\{hh2\bar{h}l\}$  та нижні  $\{hh2h\bar{l}\}$ . Пінакоїда тут не може бути, але замість нього є два моноєдри  $\{0001\}$  і  $\{000\bar{1}\}$ .

Можуть бути наявні дигексагональна призма  $\{hk\bar{i}0\}$  і гексагональні призми першого  $\{10\bar{1}0\}$  та другого роду  $\{11\bar{2}0\}$ .

Прості форми дигексагонально-пірамідального виду симетрії на стереограмі показані на рис. 51.

Мінерали – представники планального виду – гринокіт CdS, вюртцит (Zn,Fe)S, цинкіт ZnO та інші.

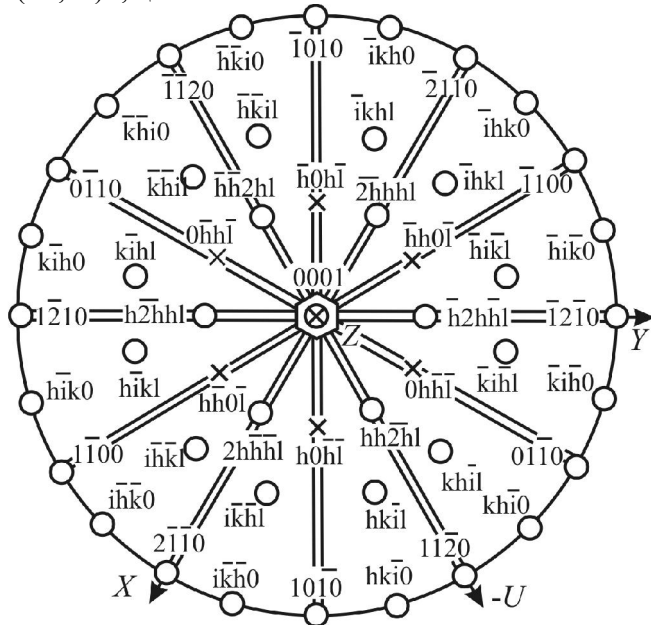


Рис. 51. Стереограма елементів симетрії та простих форм дигексагонально-пірамідального виду симетрії гексагональної сингонії. Прості форми:

$\{0001\}$ ,  $\{000\bar{1}\}$  – моноедри,  $\{10\bar{1}0\}$  – гексагональна призма (першого роду),  $\{11\bar{2}0\}$  – гексагональна призма (другого роду),  $\{hk\bar{i}0\}$  – дигексагональна призма (третього роду),  $\{h0h\bar{l}\}$  – гексагональна піраміда (першого роду, негативна),  $\{hh2\bar{h}l\}$  – гексагональна піраміда (другого роду, позитивна),  $\{hk\bar{i}l\}$  – дигексагональна піраміда

### 622 – гексагонально-трапезоєдричний (аксіальний) вид.

Симетрія:  $L_66L_2$ . Осі симетрії ті ж, що і в дигексагонально-дипірамідальному виді, але немає дзеркальних площин і центру симетрії.

Прості форми. Форми загального положення – гексагональні трапезоєдри. Розрізняють праві  $\{hk\bar{i}l\}$  та ліві  $\{i\bar{k}\bar{h}l\}$  енантіоморфні форми (кожна з 6 верхніми і 6 зміщеними вправо або, відповідно, вліво нижніми гранями). Грані мають форму трапець (не

трапецій!). Крім них можуть бути наявні інші форми: пінакоїд, гексагональні призми (першого та другого роду), гексагональні дипіраміди (першого та другого роду) і дигексагональні призми.

Прості форми гексагонально-трапецеодрічного виду симетрії на стереограмі продемонстровані на рис. 52.

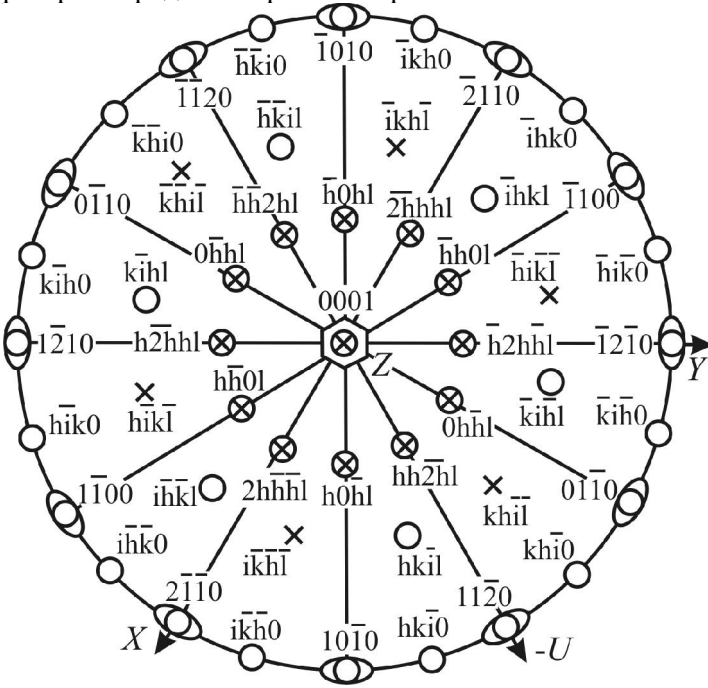


Рис. 52. Стерограма елементів симетрії та деяких простих форм гексагонально-трапецеодрічного виду симетрії гексагональної сингонії.

Прості форми:  $\{0001\}$  – базопінакоїд,  $\{10\bar{1}0\}$  і  $\{11\bar{2}0\}$  – гексагональні призми (першого і другого роду),  $\{hk\bar{i}0\}$  – дигексагональна призма,  $\{h0\bar{h}l\}$ ,  $\{hh\bar{2}h\}$  – гексагональні дипіраміди (першого і другого роду),  $\{hk\bar{i}l\}$  – гексагональний трапецедр правий

В аксіальному виді симетрії кристалізується високотемпературний кварц і деякі рідкісні мінерали.

**$b/m$  – гексагонально-дипірамідальний (центральный) вид.**  
Симетрія:  $L_6PC$ . Є поворотна вісь  $L_6$ , горизонтальна площина симетрії та центр симетрії.

Прості форми. Загальні форми цього виду – гексагональні дипіраміди: позитивні третього роду  $\{hk\bar{i}l\}$  і негативні  $\{i\bar{k}\bar{h}l\}$ . Усі ці форми складаються з 12 граней (6 зверху і 6 знизу під ними).

Можуть бути й інші форми: пінакоїд, гексагональні призми першого та другого роду, а також гексагональні призми третього роду  $\{hk\bar{i}0\}$ ,  $\{i\bar{k}h0\}$ .

Ці описані прості форми частково продемонстровані на стереограмі (рис. 53).

У центральному виді симетрії кристалізуються апатит  $\text{Ca}_5(\text{PO}_4)_3(\text{F},\text{OH})$ , піроморфіт  $\text{Pb}_5(\text{PO}_4)_3\text{Cl}$ , ванадиніт  $\text{Pb}_5(\text{VO}_4)_3\text{Cl}$  та інші мінерали.

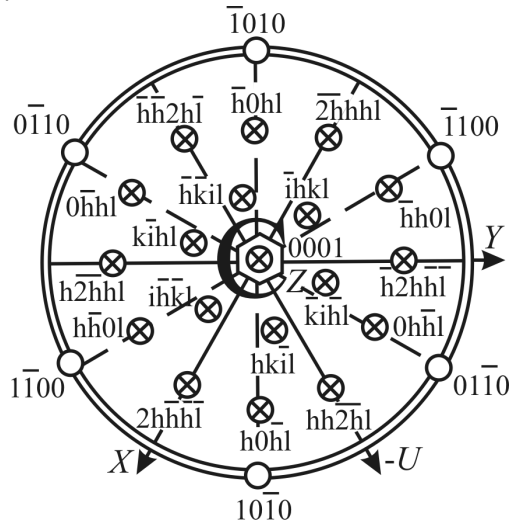


Рис. 53. Стереограма простих форм гексагонально-дипірамідального виду симетрії гексагональної сингонії. Прості форми:  $\{0001\}$  – базопінакоїд,  $\{10\bar{1}0\}$  – гексагональна призма (першого роду),  $\{h0\bar{h}l\}$  – гексагональна дипіраміда (першого роду),  $\{hh2\bar{h}l\}$  – гексагональна дипіраміда (другого роду),  $\{hk\bar{i}l\}$  – гексагональна дипіраміда (третього роду, позитивна)

**$\bar{6}$  – тригонально-дипірамідальний (інверсійно-примітивний) вид.** Симетрія:  $Li_6 = (L_3 \perp P)$ . Вертикальна вісь – інверсійно-поворотна вісь  $Li_6$ , котра еквівалентна потрійній поворотній осі з площиною симетрії, розміщеною під прямим кутом до неї.

**Прості форми.** Загальні форми – це всі орієнтації тригональних дипірамід. Симетрія не допускає гексагональних форм. Замість гексагональних дипірамід першого та другого роду є по дві тригональні піраміди кожного роду. Тому замість гексагональних призм першого та другого роду є дві тригональні призми першого роду і дві другого роду. Може бути наявний базопінакоїд.

Стереограма елементів симетрії та частини можливих простих форм тригонально-дипірамідального виду симетрії представлена на рис. 54.

В інверсійно-примітивному виді симетрії кристалізується лауреліт  $Pb_7F_{12}Cl_2$ .

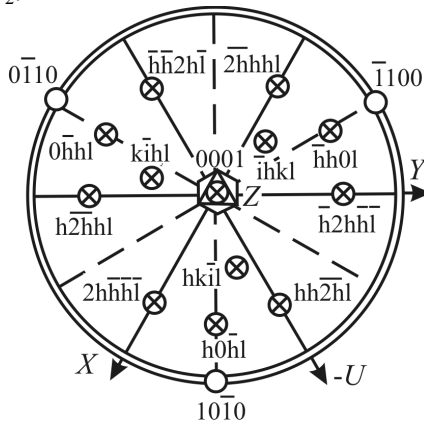


Рис. 54. Стереограма деяких простих форм тригонально-дипірамідального виду гексагональної сингонії. Прості форми:  $\{0001\}$  – пінакоїд,  $\{10\bar{1}0\}$  – тригональна призма (першого роду),  $\{h0h\bar{l}\}$  – тригональна дипіраміда (першого роду),  $\{hh\bar{2}h\bar{l}\}$  – тригональна дипіраміда (другого роду, позитивна),  $\{2hh\bar{h}l\}$  – тригональна дипіраміда (другого роду, негативна),  $\{hk\bar{l}\}$  – тригональна піраміда (третього роду)

## 6 – гексагонально-пірамідальний (примітивний) вид.

*Симетрія:*  $L_6$ . Вертикальна поворотна вісь  $L_6$  – єдиний елемент симетрії в цьому виді.

*Прості форми.* Орієнтації простих форм даного виду подібні до орієнтації простих форм гексагонально-дипірамідального виду. Але тут горизонтальної площини симетрії немає. Тому замість гексагональних дипірамід третього роду тут з'являються гексагональні піраміди – позитивні (верхні) та негативні (нижні). Аналогічно верхні гексагональні піраміди першого та другого роду зверху кристала відрізняються від таких самих форм у нижній частині. Можуть також бути моноедри, гексагональні призми першого та другого роду, а також гексагональні призми третього роду  $\{hk\bar{l}0\}$  і  $\{i\bar{k}\bar{h}0\}$ .

Стереограму простих форм гексагонально-пірамідального виду симетрії гексагональної сингонії наведено на рис. 55.

Розповсюджені мінерали-представники: канкриніт  $\text{Na}_6\text{Ca}_2[\text{AlSiO}_4]_6[\text{CO}_3]_2 \cdot (\text{H}_2\text{O})_{<4}$ , нефелін  $(\text{Na},\text{K})\text{AlSiO}_4$ . Кристали нефеліну часто мають форму гексагональної призми, яка зрізається двома гранями начебто пінакоїда, а насправді двома моноедрами.

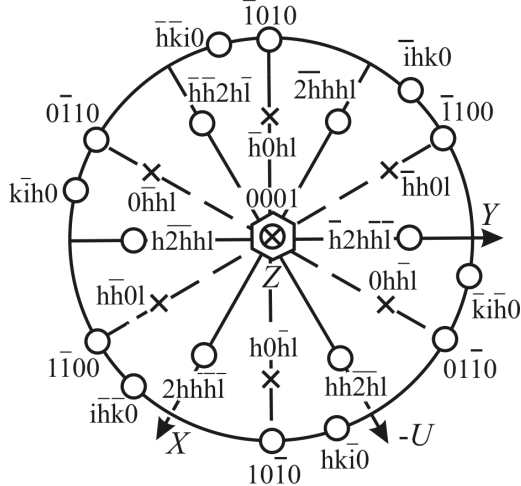


Рис. 55. Стереорама деяких простих форм гексагонально-пірамідального виду симетрії гексагональної сингонії. Прості форми:  $\{0001\}$  – моноедр,  $\{000\bar{1}\}$  – моноедр,  $\{10\bar{1}0\}$  – гексагональна призма (першого роду),  $\{hk\bar{i}0\}$  – гексагональна призма (третього роду),  $\{h0\bar{h}l\}$  – гексагональна піраміда (першого роду, негативна),  $\{hh\bar{2}hl\}$  – гексагональна піраміда (другого роду, позитивна)

### Питання для самоконтролю

Як розташовані кристалографічні осі  $X$ ,  $Y$ ,  $U$ ,  $Z$  та осі симетрії в кристалі аксіального виду тригональної сингонії? Спроектуйте і визначте символи всіх граней гексагональної призми  $\{10\bar{1}0\}$  та ромбоедра  $\{10\bar{1}1\}$ .

Спроектуйте щодо координатних осей і діагональних ліній всі грані гексагональної призми  $\{11\bar{2}0\}$  і ромбоедра  $\{10\bar{1}1\}$  у кристалі центрального виду тригональної сингонії. Визначте їхні символи.

Спроектуйте щодо координатних осей, які збігаються з  $L_3L_2$ , і визначте символи граней правого тригонального трапецеюдра  $\{51\bar{6}1\}$ . Порівняйте із загальними символами  $\{hk\bar{i}l\}$ .

Побудуйте стереограму елементів симетрії планаксіального й інверсійно-планального видів тетрагональної сингонії.

**ТЕМА 11**  
**ПРОЕКТУВАННЯ МОДЕЛЕЙ КУБІЧНОЇ СИНГОНІЇ (З**  
**УСТАНОВКОЮ І ВИЗНАЧЕННЯМ СИМВОЛІВ ГРАНЕЙ**  
**ПРОСТИХ ФОРМ)**

**Кубічна сингонія.** Установка кристалів кубічної сингонії. За координатні осі в кубічній сингонії обирають  $3L_4$ ,  $3Li_4$  або  $3L_2$  так, щоб  $4L_3$  опинились усередині кожного з октантів (на перетині трьох діагональних ліній).

$m\bar{3}m$  ( $4/m\bar{3}2/m$ ) – гексоктаедричний (планаксіальний) вид. Симетрія –  $3L_44L_36L_29PC$ . Три кристалографічні осі є четверними поворотними осями. Чотири діагональні потрійні осі симетрії виходять усередині кожного октанта, утвореного перетином діагональних площин симетрії. Окрім того, є шість діагональних подвійних поворотних осей симетрії, кожна з яких, ділить навпіл один із кутів між двома кристалографічними осями. Є також центр симетрії.

У цьому виді симетрії є ще дев'ять дзеркальних площин симетрії. Три з них відомі як координатні площини, тому що кожна з них проходить через дві координатні осі. А шість площин називаються діагональними, оскільки вони ділять навпіл кути між двома координатними площинами і проходять по діагоналях між ними. Ця комбінація елементів симетрії має найвищу симетрію, можливу у кристалах. Кожна кристалічна форма і кожна комбінація форм, які належать цьому видові, мають проявляти його повну симетрію. Важливо пам'ятати, що в цьому виді симетрії кристалографічні осі  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  збігаються з четверними поворотними осями. За осями  $L_4$  можна легко правильно зорієнтувати кристал. Для правильної орієнтації всіх кристалів кубічної сингонії треба вміти користуватись осями  $L_3$ , які на стереограмах розташовують у центрах октантів.

*Прості форми.* На рис. 56 показано гексоктаедр (48-гранник). Це загальна форма, за якою вид симетрії одержав свою назву. Серед простих форм найчастіше трапляються:

1. Куб, або гексаедр  $\{100\}$ . Куб складається з шести квадратних граней, які утворюють між собою кути  $90^\circ$ . Кожна грань перетинає одну з кристалографічних осей і паралельна двом іншим (рис. 57). Кристали у формі куба часто утворюють флюорит, галіт і галеніт.

2. Октаедр (восьмигранник)  $\{111\}$ . Октаедр (рис. 58) складається з восьми рівносторонніх трикутних граней, кожна з яких перетинає всі три кристалографічні осі з однаковими параметрами. У комбінаціях октаедр можна розпізнати за вісімкою його

однакових граней, кожна з яких однаково нахилена до трьох кристаліграфічних осей. Нормалі до граней октаедра збігаються з виходами  $L_3$ . Слід звернути увагу на те, що грані октаедра симетрично зрізають вершини куба, а грані куба – вершини октаедра. Октаедричні кристали дуже характерні для магнетиту, шпінелі та пірохлору.

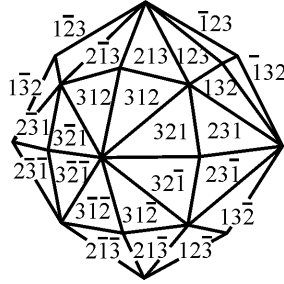


Рис. 56. Гексоктаедр

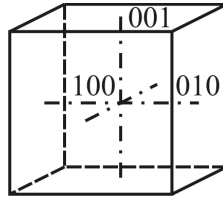


Рис. 57. Куб

3. Ромбододекаедр  $\{110\}$  (рис. 59). Ромбододекаедр складається з 12 ромбічних граней. Кожна з граней однаково перетинає дві кристаліграфічні осі й паралельна третій. Нормалі до граней ромбододекаедра збігаються з напрямками діагональних ліній. Гранати часто утворюють ромбододекадричні кристали і тому цю просту форму часто називають гранатоедром.

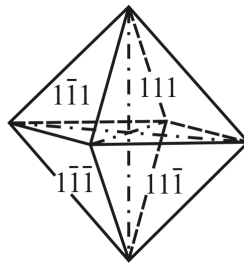


Рис. 58. Октаедр



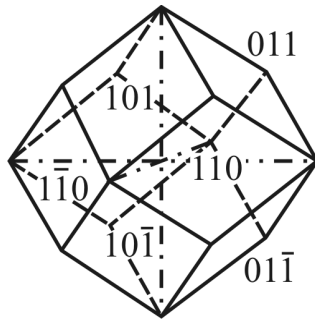


Рис. 59. Ромбододекаедр

4. Тетрагон-триоктаедр (лейцитоедр)  $\{hkk\}$  також є поширеною формою мінералів. Тетрагон-триоктаедр складається з 24 трапецеподібних граней, кожна з яких відтинає дві координатні осі з рівними параметричними відрізками, а на третій – менший відрізок. Є різні тетрагон-триоктаедри, грані котрих мають різні кути нахилу, але найбільш звичайні – це  $\{211\}$  (рис. 60). Цю форму назвали тетрагон-триоктаедром, щоби підкреслити, що кожна з її граней має чотирикутну форму. Інша 24-гранна форма – тригон-триоктаедр – має трикутні грані. Полюси граней тетрагон-триоктаедра розташовані на діагональних лініях у зоні між координатними осями і  $4L_3$ . Ця форма дуже характерна для гранатів і лейциту.

5. Тетрагексаедр  $\{hk0\}$  – більш рідкісна форма мінералів. Тетрагексаедр (або пірамідальний куб) складається з 24 рівнобедрених трикутних граней, кожна з яких перетинає дві координатні осі на різних відстанях і паралельна третій. Ці форми утворюють групи по 4 грані навколо координатних осей (рис. 61). Полюси граней тетрагексаедра розташовані на координатних лініях недалеко від осей  $X, Y, Z$ . Є ряд тетрагексаедрів, котрі відрізняються один від одного нахилом граней. Найбільш звичайний –  $\{210\}$ . Индекси решти форм –  $\{310\}$ ,  $\{410\}$ ,  $\{320\}$  та інші, або в загальному вигляді  $\{hk0\}$ .

6. Тригон-триоктаедр  $\{hhl\}$ . Тригон-триоктаедр складається з 24 рівнобедрених трикутних граней, кожна з яких з однаковими параметрами відсікає дві кристалографічні осі, а третю – з більшим. Ці форми утворюють групи по 3 грані навколо осі  $L_3$ . Грані різних тригон-триоктаедрів мають різний нахил, але найбільш звичайними є  $\{221\}$  (рис. 62). Проектуються вони на діагональних лініях між  $L_3$  і виходами діагональних осей.

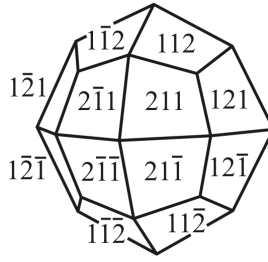


Рис. 60. Тетрагон-триоктаедр

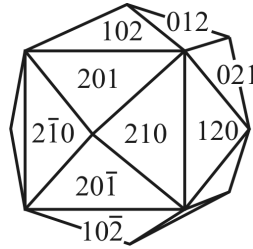


Рис. 61. Тетрагексаедр

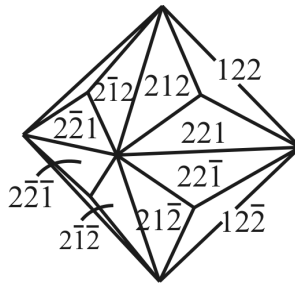


Рис. 62. Тригон-триоктаедр

7. Гексоктаедр  $\{hkl\}$ . Гексоктаедр складається з 48 неправильних трикутних граней, кожна з яких на всіх кристалографічних осях дає різні параметричні відрізки (рис. 56). Є різні гексоктаедри з різними співвідношеннями осевих відрізків. Поширені гексоктаедри мають символи  $\{321\}$ ,  $\{421\}$ ,  $\{531\}$  та інші. У загальному вигляді такі гексоктаедри мають символ  $\{hkl\}$ . Вершини кубічних кристалів флюориту часто притупляються групами з шести граней гексоктаедра.

*Визначення індексів у символах простих форм.* Для визначення простих форм, наявних на будь-якому кристалі гексоктаедричного виду, насамперед необхідно знайти орієнтацію кристалографічних осей (осей четвертого порядку). Як тільки кристал зорієнтовано по цих осях, грані куба, ромбододекаедра й октаедра легко розпізнати, тому що вони перетинають відповідно одну, дві, або всі три кристалографічні осі на рівних відстанях (рис. 63). Швидко можна одержати індекси в символах граней інших форм, які симетрично зрізають (притупляють) ребра між гранями. Алгебраїчна сума індексів  $h$ ,  $k$ ,  $l$  двох сусідніх граней дає індекси грані, що симетрично зрізає ребро між ними.

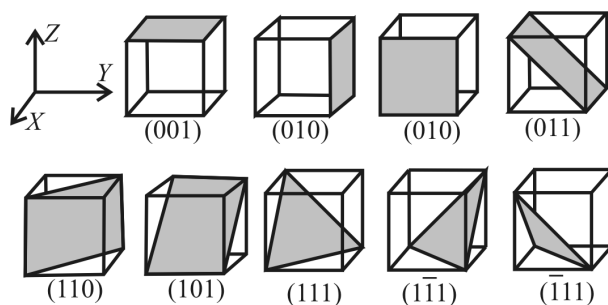


Рис. 63. Символи окремих граней простих форм кубічної сингонії

Згідно з *правилом зростання індексів* у символах граней будь-якого кристала максимальні значення має індекс, який відповідає позиції, найближчій до відповідної кристалографічної осі, а мінімальне – має індекс позиції, найвіддаленішої від якоїсь осі. Так, грані (213) і (123) – найближчі до осі Z, а грані (321) і (231) – віддалені від осі Z (рис. 56).

*Прості форми в гексоктаедричному виді.* Куб, октаедр і ромбододекаедр – найбільш поширені форми. Тетрагон-триоктаедр також часто спостерігається як головна форма в деяких розповсюджених мінералах. Інші форми – тетрагексаедр, тригон-триоктаедр і гексоктаедр – рідкісні та звичайно трапляються як невеликі зрізи в комбінаціях.

Стереограма елементів симетрії та простих форм гексоктаедричного виду симетрії ілюстрована на рис. 64.

У гексоктаедричному виді кристалізується багато мінералів. Серед них – алмаз C, самородна мідь Cu, самородне золото Au, самородне срібло Ag, галеніт PbS, куприт  $\text{Cu}_2\text{O}$ , ураніт  $\text{UO}_2$ , шпінель  $\text{MgAl}_2\text{O}_4$ , хроміт  $\text{Fe}^{2+}\text{Cr}_2\text{O}_4$ , магнетит  $\text{Fe}^{3+}_2\text{Fe}^{2+}\text{O}_4$ , гранати (альмандин  $\text{Fe}^{2+}_3\text{Al}_2[\text{SiO}_4]_3$ , андрадит  $\text{Ca}_3\text{Fe}^{3+}_2[\text{SiO}_4]_3$ , гросуляр

$\text{Ca}_3\text{Al}_2[\text{SiO}_4]_3$ , піроп  $\text{Mg}_3\text{Al}_2[\text{SiO}_4]_3$ , галіт  $\text{NaCl}$ , сільвін  $\text{KCl}$ , хлораргірит  $\text{AgCl}$ .

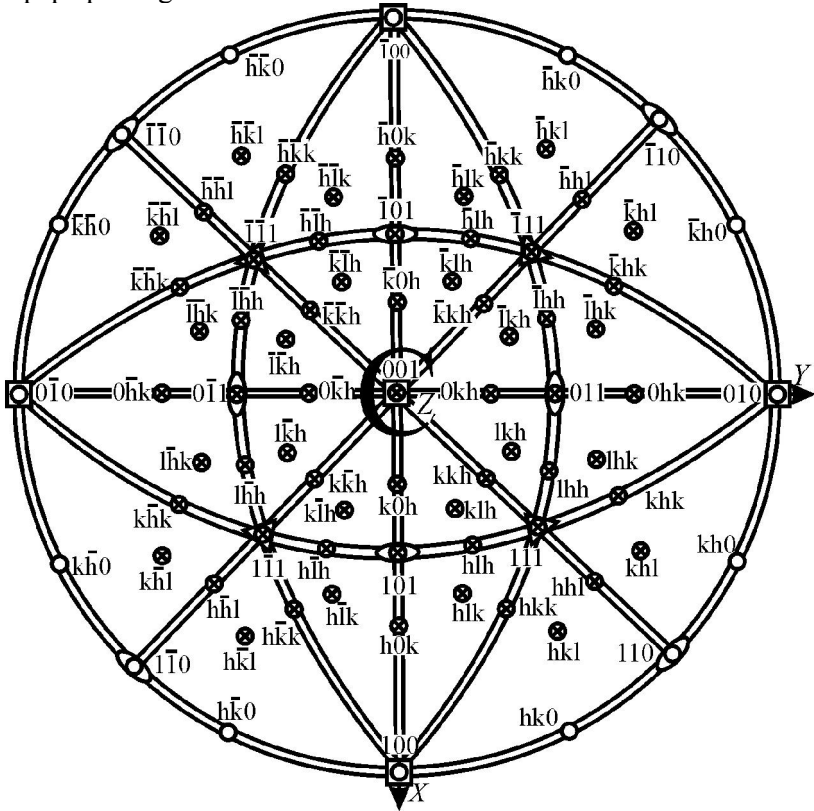


Рис. 64. Стереограма простих форм гексоктаедричного виду симетрії кубічної сингонії. Прості форми:  $\{100\}$  – гексаедр,  $\{110\}$  – ромбододекаедр,  $\{111\}$  – октаедр,  $\{hk0\}$  – тетрагексаедр,  $\{hkk\}$  – тетрагон-триоктаедр,  $\{hhl\}$  – тригон-триоктаедр,  $\{hkl\}$  – гексоктаедр

### 23 – пентагон-тритетраедричний (примітивний) вид.

*Симетрія:*  $4L_33L_2$ . Три кристалографічні осі збігаються з подвійними поворотними осями симетрії, а чотири діагональні осі – з потрійними осями симетрії (рис. 66).

*Прості форми.* Серед загальних простих форм розрізняють чотири різновиди пентагон-тритетраедрів (рис. 65). Є позитивні ліві  $\{hkl\}$  і праві  $\{h\bar{l}k\}$  різновиди. Так само серед негативних пентагон-тритетраедрів є ліві  $\{hk\bar{l}\}$  і праві  $\{h\bar{l}\bar{k}\}$ . На стереограмах у лівих формах дві верхні грані розташовуються біля найближчої осі  $L_3$

зліва, а в правих – справа. Ліві форми з правими утворюють енантіоморфні різновиди.

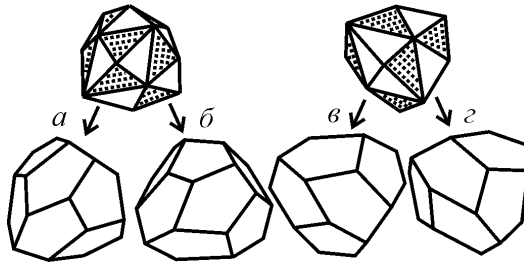


Рис. 65. Просторові співвідношення пентагон-тритетраєдрів із гранями позитивного та негативного гексатетраєдра. Пентагон-тритетраєдри: *a* – лівий негативний; *б* – правий негативний; *в* – лівий позитивний; *з* – правий позитивний

Іншими формами, котрі можуть бути наявні, є куб, ромбододекаєдр, пентагон-додєкаєдри (позитивні  $\{hk0\}$  і негативні  $\{h0k\}$ ), кубічні тетраєдри (позитивні  $\{111\}$  і негативні  $\{1\bar{1}1\}$ ), тетрагон-тритетраєдри (позитивні  $\{hhl\}$  й негативні  $\{hhl\bar{1}\}$ ) і тригон-тритетраєдри (позитивні  $\{hkk\}$  й негативні  $\{hkk\bar{1}\}$ ).

Стереограма елементів симетрії та простих форм пентагон-тритетраєдричного виду симетрії показана на рис. 66.

Мінерал-представник – лангбейніт  $K_2Mg_2(SO_4)_3$ .

***m3*** – дидодєкаєдричний (центральный) вид. *Симетрія:*  $4L_33L_23PC$ . Три кристалографічні осі є подвійними поворотними осями симетрії, чотири діагональні осі, кожна з яких виходить у середині октанта, – це потрійні поворотні осі симетрії. Три координатні площини є дзеркальними площинами симетрії.

*Прості форми.* Формами загального положення є дидодєкаєдри (рис. 68). Більш розповсюдженими формами є пентагон-додєкаєдри, куби, октаєдри й ромбододекаєдри.

Пентагон-додєкаєдри бувають позитивними  $\{hk0\}$  і негативними  $\{h0l\}$ . Ця форма складається з 12 граней у вигляді п'ятикутників, кожна з яких перетинає одну координатну вісь на одній відстані, іншу вісь – на іншій і є паралельною третій осі. Поворот на  $90^\circ$  навколо кристалографічної осі переводить позитивний пентагон-додєкаєдр у негативний. Є ряд позитивних і негативних пентагон-додєкаєдрів  $\{hk0\}$ ,  $\{h0k\}$ , які відрізняються один від одного за нахилом граней. Найбільш поширений позитивний

пентагон-додекаедр має символ  $\{210\}$  (рис. 67, *a*). На рис. 67, *б* показано відповідний негативний пентагон-додекаедр.

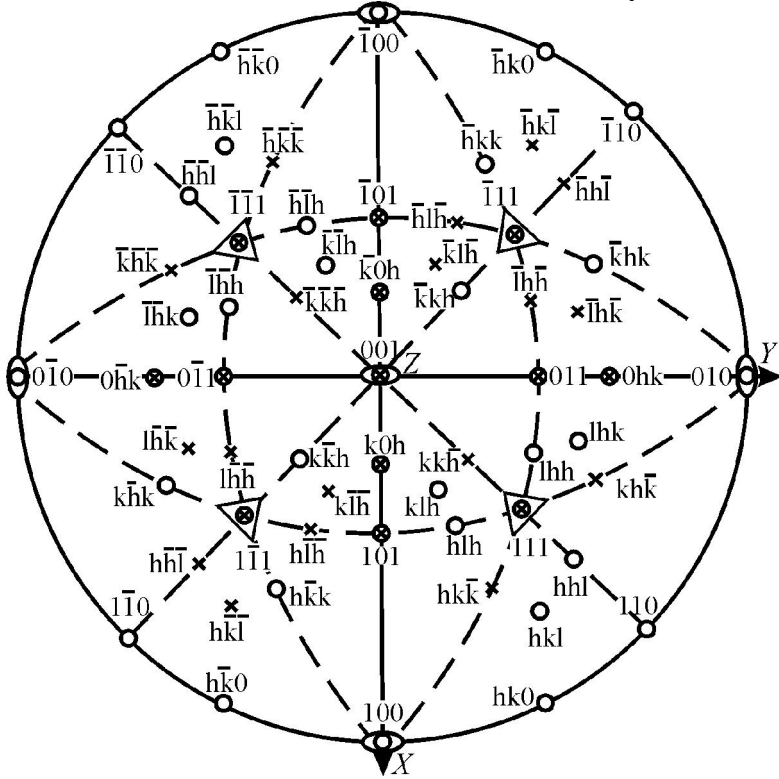


Рис. 66. Стереограма елементів симетрії та деяких простих форм пентагон-тригетраедричного виду симетрії кубічної сингонії. Прості форми:  $\{100\}$  – гексаедр,  $\{110\}$  – ромбододекаедр,  $\{hk0\}$  – пентагон-додекаедр позитивний,  $\{111\}$  – кубічний тетраедр позитивний,  $\{11\bar{1}\}$  – кубічний тетраедр негативний,  $\{hhl\}$  – тетрагон-тригетраедр позитивний,  $\{hkk\bar{\phantom{0}}\}$  – тригон-тригетраедр негативний,  $\{hkl\}$  – пентагон-тригетраедр лівий позитивний

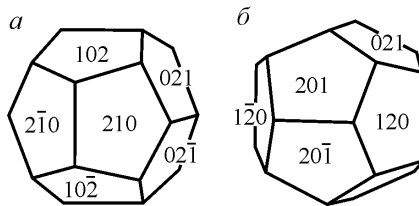


Рис. 67. Пентагон-додекаедр: *a* – позитивний; *б* – негативний

Дидодекаедри (рис. 68) бувають позитивними  $\{hkl\}$  і негативними  $\{h\bar{l}k\}$ . Дидодекаедр – це рідкісна форма, що складається з 24 граней, які відповідають половині граней гексоктаедра. Дидодекаедр можна уявити як пентагон-додекаедр, кожна грань котрого заломлюється на дві. Як у випадку з пентагон-додекаедром, поворот на  $90^\circ$  навколо однієї з кристалографічних осей також переводить позитивний дидодекаедр у негативний.

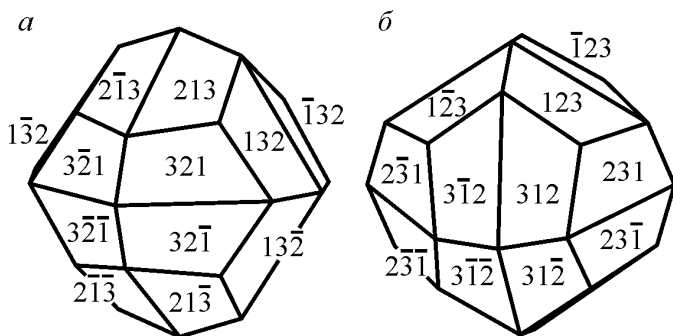


Рис. 68. Дидодекаедри: позитивний (а) і негативний (б)

Окрім пентагон-додекаедра і дидодекаедра, можуть бути наявні куб, ромбододекаедр, октаедр, тетрагон-триоктаедр і тригон-триоктаедр.

Стереограма елементів симетрії та простих форм центрального виду симетрії наведена на рис. 69.

На деяких кристалах є тільки ці форми (без пентагон-додекаедра і дидодекаедра). У цьому разі відсутність  $L_4$  та діагональних площин симетрії прихована, та симетрію цих кристалів важко відрізнити від гексоктаедричного виду. Це часто справедливо для кубів та октаедрів піриту і скутерудиту. Однак на них звичайно помітна штриховка або фігури травлення, котрі узгоджуються з більш низькою симетрією дидодекаедричного виду. Це показано на рис. 70, який представляє куб піриту з характерною координатною штриховкою, котра виявляє більш низьку симетрію (відсутність поворотних осей четвертого порядку і наявність лише координатних площин симетрії).

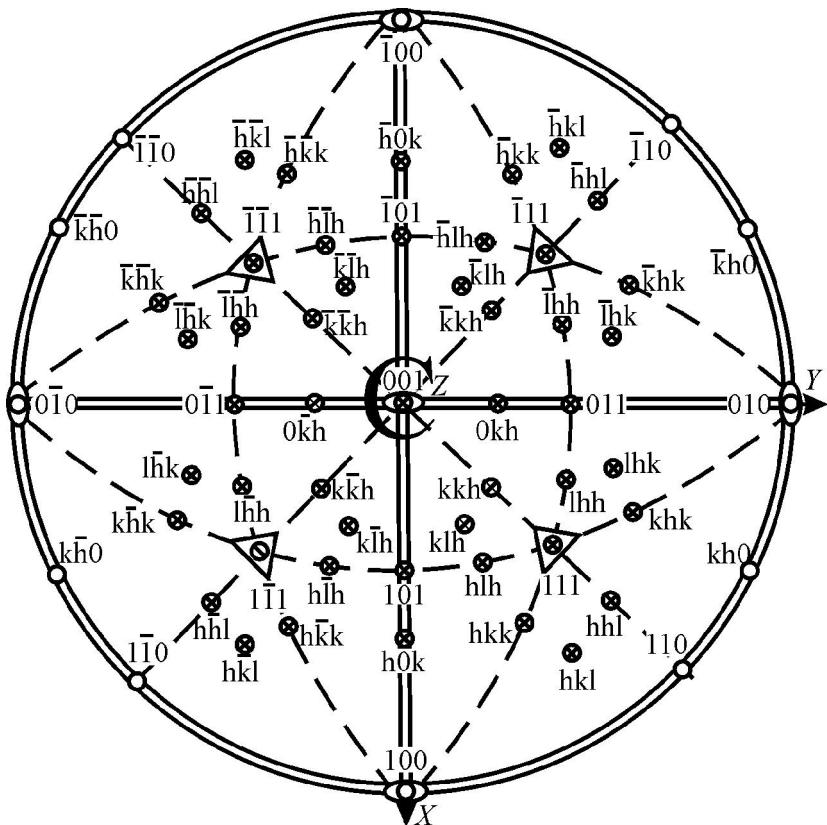


Рис. 69. Стереограма елементів симетрії та простих форм дидодекадричного (центрального) виду симетрії кубічної сингонії. Прості форми:  $\{100\}$  – гексаедр,  $\{110\}$  – ромбододекаедр,  $\{h0k\}$  – пентагон-дододекаедр негативний,  $\{111\}$  – октаедр,  $\{hhl\}$  – тригон-триоктаедр,  $\{hkk\}$  – тетрагон-триоктаедр,  $\{hkl\}$  – дидодекаедр позитивний

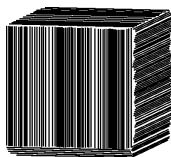


Рис. 70. Куб зі штриховкою

Мінерали – представники центрального виду симетрії герсдорфіт  $\text{NiAsS}$ , пірит  $\text{Fe}^{2+}\text{S}_2$  (рис. 70), скутерудит  $(\text{Co},\text{Ni})\text{As}_{3-x}$ , спериліт  $\text{PtAs}_2$  та інші.



$\bar{4}3m$  – гексатетраедричний (планальний) вид. Симетрія:  $3Li_44L_36P$ . Три кристалографічні осі є інверсійно-поворотними осями  $Li_4$ . Чотири діагональні осі – це потрійні поворотні осі. Є шість діагональних дзеркальних площин симетрії.

*Прості форми.* Форми загального положення – гексатетраедри (позитивні й негативні). Поширеними простими формами є:

1. Кубічні тетраедри (позитивний  $\{111\}$  і негативний  $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ ). Вони є одиничними гранями. Грані мають форму рівносторонніх трикутників. Кожна з них перетинає всі кристалографічні осі з однаковими параметричними відрізками. Взаємозв'язок розташування граней двох кубічних тетраедрів з октаедром показано на рис. 71. Геометрично позитивний і негативний тетраедри ідентичні (рис. 72, а, б). Ці два різновиди треба розрізняти, оскільки вони можуть траплятись і разом (рис. 72, в). Якщо позитивний і негативний тетраедри однаково розвинені на одному й тому ж кристалі, то цю комбінацію важко відрізнити від октаедра. Якщо це трапляється, то грані обох форм можуть проявляти різний блиск, фігури травлення і штриховку, що допомагає їх розрізнити.

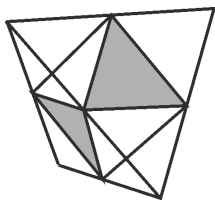


Рис. 71. Взаємозв'язок орієнтації октаедра й обох кубічних тетраедрів (грані позитивного тетраедра – затемнені)

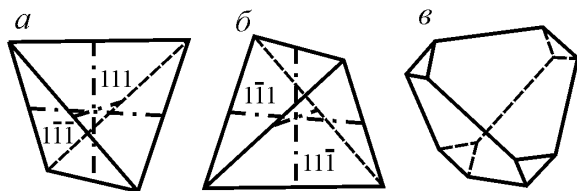


Рис. 72. Кубічні тетраедри: а – позитивний; б – негативний; в – комбінація обох кубічних тетраедрів (переважає позитивний різновид)

2. Тригон-тритетраедри (є позитивні  $\{hkk\}$  та негативні  $\{h\bar{k}\bar{k}\}$ ). Ці форми мають по 12 граней у вигляді рівнобедрених трикутників (рис. 73). Позитивну форму можна зв'язати з негативною поворотом на  $90^\circ$  навколо вертикальної осі Z.

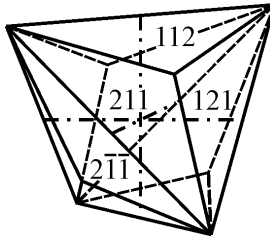


Рис. 73. Позитивний тригон-тритетраedr

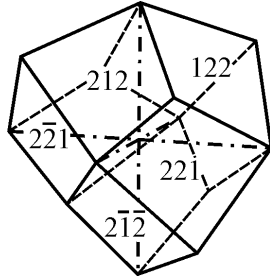


Рис. 74. Позитивний тетрагон-тритетраedr

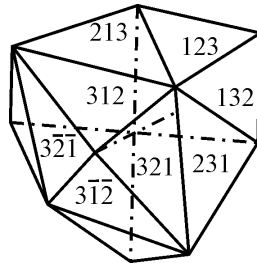


Рис. 75. Позитивний гексатетраedr

3. Тетрагон-тритетраедри (позитивний  $\{hhl\}$  і негативний  $\{h\bar{h}l\}$ ). Це 12-гранна форма, грані якої мають форму чотирикутників (рис. 74).

4. Гексатетраedr позитивний  $\{hkl\}$  (рис. 75) і негативний  $\{h\bar{k}l\}$ . Гексатетраedr має 24 грані, котрі відповідають половині граней гексоктаедра, взятих по чергово групами по шість зверху і знизу.

У гексатетраедричному виді можливі також куб  $\{100\}$ , ромбододекаedr  $\{110\}$  і тетрагексаedr  $\{hk0\}$ .

Стереограму простих форм гексатетраедричного виду симетрії представлено на рис. 76.

Мінерали-представники: метацинабарит  $\text{HgS}$ , сфалерит  $(\text{Zn,Fe})\text{S}$ , тенантит (блякла руда)  $\text{Cu}_{11}\text{Fe}^{2+}[\text{AsS}_3]_4\text{S}$ , гельвін  $\text{Mn}_4[\text{BeSiO}_4]\text{S}$  та інші.

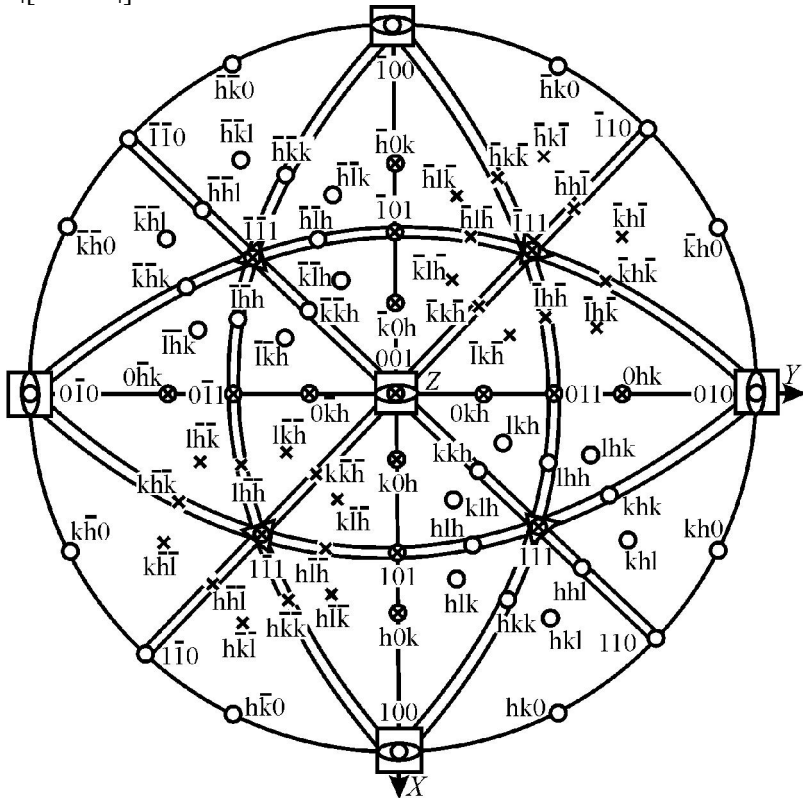


Рис. 76. Стереограма елементів симетрії та деяких простих форм гексатетраедричного виду симетрії кубічної сингонії. Прості форми:  $\{100\}$  – гексаедр,  $\{110\}$  – ромбододаедр,  $\{hk0\}$  – тетрагексаедр,  $\{111\}$  і  $\{11\bar{1}\}$  – кубічні тетраедри (позитивний і негативний),  $\{hkk\}$  – тригон-тритетраедр позитивний,  $\{hhl\}$  – тетрагон-тритетраедр позитивний,  $\{hkl\}$  – гексатетраедр позитивний

**432 – пентагон-триоктаедричний (аксіальний) вид.** Симетрія:  $3L_44L_36L_2$ .

*Прості форми.* Форми загального положення – пентагон-триоктаедри (праві  $\{hkl\}$  та ліві  $\{h\bar{k}l\}$ , рис. 78). Дві верхні грані лівих пентагон-тритетраедрів розташовані біля ближчої осі  $L_3$  зліва, а правих – справа. Кожна з цих двох енантіоморфних форм містить по 24 грані. У пентагон-триоктаедричному виді можуть бути наявні

всі прості форми гексоктаедричного виду, за винятком гексоктаедра.

Стереографічна проекція елементів симетрії та простих форм пентагон-триоктаедричного виду симетрії кубічної сингонії зображена на рис. 79.

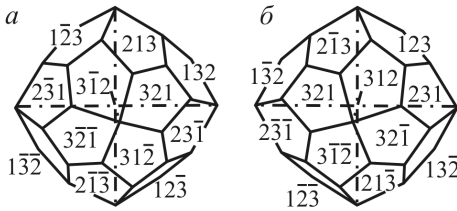


Рис. 78. Пентагон-триоктаедр лівий (а) і правий (б)

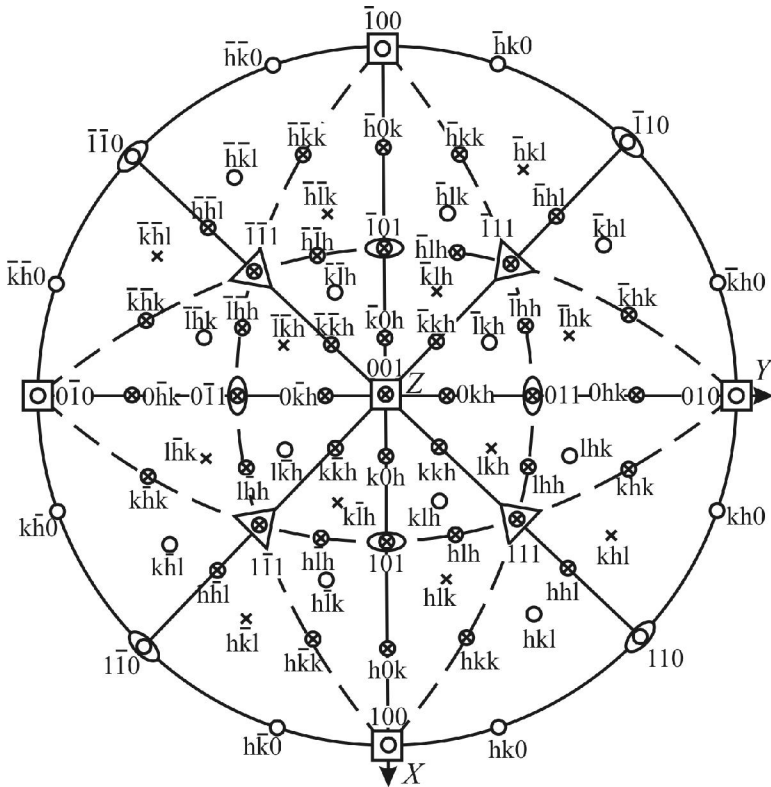


Рис. 79. Стереограма елементів симетрії та деяких простих форм пентагон-триоктаедричного виду симетрії кубічної сингонії. Прості форми:  $\{100\}$  – гексаедр,  $\{110\}$  – ромбододекаедр,  $\{hk0\}$  – тетрагексаедр,  $\{111\}$  – октаедр,  $\{hkk\}$  – тетрагон-триоктаедр,  $\{hhl\}$  – тригон-триоктаедр,  $\{hkl\}$  – пентагон-триоктаедр лівий

У цьому виді симетрії кристалізується невелике число рідкісних мінералів. Із них найвідоміший петцит  $\text{Ag}_3\text{AuTe}_2$ .

### Питання для самоконтролю

Які прості форми проектуються на координатних лініях у планальному й центральному видах симетрії? Дати стереограму елементів симетрії та символи цих граней (у загальній формі).

Які прості форми проектуються на діагональних лініях у примітивному й аксіальному видах симетрії? Дати стереограму елементів симетрії та символи цих граней (у загальній формі).

Які різновиди загальних форм трапляються у планальному виді кубічної сингонії? Побудувати стереограму елементів симетрії та позиції граней  $\{hkl\}$ .

Які різновиди загальних форм трапляються у планаксіальному виді кубічної сингонії? Побудувати стереограму елементів симетрії та позиції граней  $\{hkl\}$ .

## ТЕМА 12

### СИМВОЛИ РЕБЕР БАГАТОГРАННИКІВ

Поряд зі символами граней  $(hkl)$  часто користуємося символами ребер  $[rst]$ . Ці символи дають змогу визначати орієнтацію у просторі не тільки ребер, але й інших напрямків (наприклад, осей зон) щодо координатних осей  $X, Y, Z$ .

У трьохіндексних символах ребер  $[rst]$  напрямком ребра, що виходить з точки  $O$  початку координат, визначається координатами  $(x, y, z)$  якоїсь точки  $N$  на цьому ребрі. Ці координати пропорційні числу примітивних відрізків  $a_0, b_0, c_0$ , які вміщені у векторах, що замикають напрямком  $ON$ . Такі вектори паралельні осям  $X, Y, Z$  (рис. 80). Числа  $r, s, t$  у символі ребра  $[rst]$  визначаються зі співвідношення

$$r : s : t = \frac{x}{a_0} : \frac{y}{b_0} : \frac{z}{c_0}.$$

Значення  $a_0, b_0, c_0$  можна замінити пропорційними їм відношеннями параметрів одниничної грані. Символ ребра  $ON$  у розглянутому випадку (рис. 80) буде  $[234]$ . Символи ребер беруть у квадратні дужки.

**Кристалографічні (координатні) осі.** Символ першої координатної осі  $[100]$  визначається зі співвідношення

$$\frac{x}{a_0} : \frac{y}{b_0} : \frac{z}{c_0} = \frac{x}{a_0} : \frac{0}{b_0} : \frac{0}{c_0} = \frac{x}{a_0} : 0 : 0 = 1 : 0 : 0. \text{ Аналогічно розрахову-}$$

ють символи другої й третьої кристалографічних осей. Отже, **для кристалографічних координатних осей у всіх сингоніях, окрім гексагональної та тригональної, прийняті такі трьохіндексні позначення:**

перша вісь [100], інакше вісь  $a$ , або вісь  $X$ . Символ [100] мають також усі ребра, паралельні осі  $X$ ;

друга вісь [010], інакше вісь  $b$ , або вісь  $Y$ . Символ [010] мають також усі ребра, паралельні осі  $Y$ ;

третья вісь [001], інакше вісь  $c$ , або вісь  $Z$ . Символ [001] мають також усі ребра, паралельні осі  $Z$ .

У ромбоедричній установці (установка Міллера) тригональних кристалів за координатні осі [100], [010], [001] звичайно обирають ребра ромбоедра. У тригональних кристалах можлива також гексагональна установка (установка Браве), яку мінералоги використовують частіше.

У кристалах гексагональної й тригональної сингоній використовують **чотирьохіндексні** символи ребер. Для визначення символу ребра  $ON$ , яке виходить із точки початку координат  $O$ , треба обрати чотири вектори, що замикають напрямком  $ON$ . Такі вектори паралельні чотирьом кристалографічним осям  $X, Y, U, Z$ . Один із варіантів вибору цих векторів  $OR, RS, ST$  і  $TN$  зображено на рис. 81. Якщо відношення цих векторів виміряти відповідними примітивними проміжками  $a_0 = b_0 = d_0 \neq c_0$  (або параметрами одиничної грані), то ми отримаємо відношення чотирьох індексів у символі ребра, пропорційних вказаним векторам:

$$r:s:(-r-s):t = \frac{OR}{a_0} : \frac{RS}{b_0} : \frac{ST}{d_0} : \frac{TN}{c_0} = \frac{OR}{a_0} : \frac{RS}{a_0} : \frac{ST}{a_0} : \frac{TN}{c_0}.$$

Для однозначного визначення відношень індексів необхідно пам'ятати, що сума перших трьох індексів у чотирьохіндексному символі ребра завжди дорівнює нулю. Символ ребра, координатної осі або іншого напрямку буде  $[rs(-r-s)t]$ .

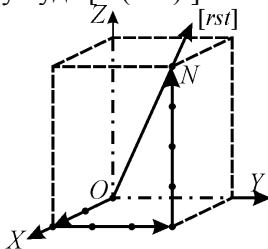


Рис. 80. Визначення триіндексного символу ребра  $[rst]$ . Координати точки  $N$  на ребрі  $ON$  пропорційні числу примітивних відрізків  $a_0, b_0, c_0$  на векторах, паралельних осям  $X, Y, Z$ , які замикають напрямком  $ON$

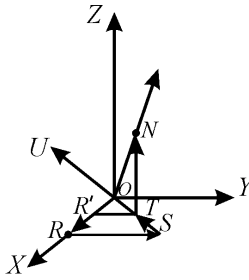


Рис. 81. Визначення чотирьохіндексового символу ребра ON у кристалах гексагональної й тригональної сингонії (в установці Браве). Координати точки N визначаються векторами OR, RS, ST і TN, паралельними осям  $X$ ,  $Y$ ,  $U$ ,  $Z$ , які замикають напрямком ON

*У гексагональній і тригональній сингоніях (в установці Браве) для кристалографічних координатних осей прийняті такі чотирьохіндексові позначення:*

перша вісь  $[2\bar{1}\bar{1}0]$ , інакше вісь  $a$ , або вісь  $X$ ;

друга вісь  $[\bar{1}2\bar{1}0]$ , інакше вісь  $b$ , або вісь  $Y$ ;

третья вісь (допоміжна)  $[\bar{1}\bar{1}20]$ , або вісь  $U$ ;

четверта вісь  $[0001]$ , інакше вісь  $c$ , або вісь  $Z$ .

Як розраховують конкретні чотирьохіндексові символи координатних осей і ребер кристалів, розглянемо нижче (після з'ясування співвідношень між символами граней і ребер). Вивчаючи закономірності розташування сукупності граней у кристалах, часто слід визначати не тільки грані, але й символи ребер і осей зон, оскільки зона, або пояс кристала – це сукупність граней, що перетинаються по паралельних ребрах. Знаючи символи граней, які перетинаються, можна розрахувати символ ребра, по якому вони перетинаються, тобто визначити символ осі зони. Для цього необхідно встановити зв'язок між символами двох граней (площин), що перетинаються, та символом ребра, по якому вони перетинаються.

### ***Зв'язок між символами граней і ребер кристала***

Положення грані кристала як всякої площини може бути визначене рівнянням загального вигляду:

$$Ax + By + Cz = D,$$

де  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – біжучі координати, тобто координати точки на площині;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – коефіцієнти;  $D$  – вільний член, прямо пропорційний відстані площини від початку координат. Оскільки у кристалах ця відстань не може бути зафіксована, то вільний член  $D$  можна прирівняти до нуля, розглянувши рівняння площини, паралельної даній, що проходить через початок координат:

$$Ax + By + Cz = 0. \quad (1)$$

Відоме з аналітичної геометрії рівняння площини у відрізках можна записати:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

де  $a, b, c$  – відрізки (параметри), які відсікає площина (грань) на координатних осях  $X, Y$  і  $Z$ . А якщо перенести площину в початок координат, також одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} &= 0, \text{ або} \\ \frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Якщо порівняти рівняння (1) і (2), побачимо, що відношення зворотних параметрів  $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$  є ніщо інше, як відношення коефіцієнтів  $A : B : C$ . З іншого боку, це відношення відповідає відношенню індексів Міллера  $h, k, l$  для грані кристала (за умов, що параметри грані  $a, b, c$  та біжучі координати  $x, y, z$  взяті у кристалографічній координатній системі). Тому можна записати:

$$A : B : C = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = h : k : l.$$

Таким чином, індекси Міллера – це коефіцієнти при біжучих координатах рівняння площини; а рівняння площини набуде вигляду:

$$hx + ky + lz = 0. \quad (3)$$

Для кристала індекси  $h, k, l$  завжди цілочисельні. Реалізуватись у вигляді грані кристала може лише така площина, у рівнянні якої коефіцієнти при біжучих координатах, взятих у кристалографічній координатній системі, раціональні. Тобто їх відношення може бути зведене до відношення цілих взаємно простих чисел. У цьому полягає кристалографічне «трактування» площини.

Який же зв'язок символу грані кристала ( $hkl$ ) і символу ребра  $[rst]$ , що лежать у цій площині?

Оскільки символом ребра є відносні координати будь-якої його точки, а саме ребро кристала лежить у цій площині, то координати будь-якої точки цього ребра кристала мають задовольняти рівняння даної площини. У цьому разі біжучі координати  $x, y, z$  у рівнянні площини виявляються нічим іншим, як індексами символу ребра, що лежить у даній площині (або паралельного їй), тобто  $x : y : z = r : s : t$ . Із визначення символів грані й ребра випливає, що



$$h : k : l = \frac{a_0}{a} : \frac{b_0}{b} : \frac{c_0}{c} \quad \text{і} \quad a : b : c = \frac{a_0}{h} : \frac{b_0}{k} : \frac{c_0}{l} \quad (\text{для грані}),$$

$$x : y : z = r \cdot a_0 : s \cdot b_0 : t \cdot c_0 \quad (\text{для ребра}),$$

тому рівняння (3) у кристалографічній системі координат набуде вигляду:

$$hr + ks + lt = 0. \quad (4)$$

Це фундаментальне рівняння, виведене Х.С. Вейсом, пов'язує символи грані та ребра кристала, що паралельне цій грані (або, що те саме, – символи грані й осі зони, яка включає цю грань). Рівняння (4) відоме як **формула Вейса**.

Користуючись рівнянням (4) і знаючи символи двох граней із **трьохіндексними символами**  $(h_1k_1l_1)$  і  $(h_2k_2l_2)$ , можна визначити символ ребра  $[rst]$ , по якому вони перетинаються. Для цього треба розв'язати систему рівнянь, складених для кожної з площин, що перетинаються:

$$\left. \begin{aligned} h_1r + k_1s + l_1t &= 0, \\ h_2r + k_2s + l_2t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Такі системи зручно розв'язувати **методом перехресного множення**:

$$\begin{array}{c|cc} h_1 & k_1 & l_1 \\ & \swarrow & \searrow \\ & l_1 & k_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ & \swarrow & \searrow \\ & l_2 & k_2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \end{array} \right.$$

$$r : s : t = (k_1l_2 - k_2l_1) : (h_2l_1 - h_1l_2) : (h_1k_2 - h_2k_1).$$

Таким же способом можна обчислити і символи грані  $(hkl)$ , у площині якої лежать два ребра  $[r_1s_1t_1]$  і  $[r_2s_2t_2]$ , що перетинаються:

$$\left. \begin{aligned} hr_1 + ks_1 + lt_1 &= 0, \\ hr_2 + ks_2 + lt_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Наприклад, знаючи символи двох ребер куба, які перетинаються, тобто двох координатних осей кристала: осі  $X [100]$  і осі  $Z [001]$ , можна розрахувати символ грані  $(hkl)$ , у площині котрої вони розміщуються. Для цього складемо систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} h \cdot 1 + k \cdot 0 + l \cdot 0 &= 0, \\ h \cdot 0 + k \cdot 0 + l \cdot 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

і, розв'язавши їх способом перехресного множення, визначимо символ грані:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & \\
 & & & & \\
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 (hkl) & = (0 - 0) : (1 - 0) : (0 - 0) & = (010).
 \end{array}$$

Для визначення символів ребер, які містяться на перетині двох граней з **чотирьохіндексовими символами**, спочатку здійснюють редуцію індексів у символах цих граней. Беруть до уваги, що сума перших трьох індексів у символах граней і ребер дорівнює нулю.

Якщо чотирьохіндексові символи двох граней були  $(11\bar{2}2)$  і  $(\bar{2}112)$ , то трьохіндексовий редукований символ першої грані буде  $(1-\bar{2})(1-\bar{2})\cdot 2 = (33\cdot 2)$ , а у другій грані буде  $(\bar{2}-1)(1-1)\cdot 2 = (\bar{3}0\cdot 2)$ . Знаючи редуковані символи двох граней  $(33\cdot 2)$  і  $(\bar{3}0\cdot 2)$ , легко знайти символ ребра, яке розташоване на перетині цих граней. Для цього будемо таблицю для знаходження відношення  $r : s : t$ .

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 3 & 3 & 2 & 3 & 2 \\
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & \\
 & & & & \\
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & \\
 \bar{3} & 0 & 2 & \bar{3} & 0 \\
 \hline
 & & & & 2
 \end{array}$$

Методом перехресного множення знаходимо  $r : s : t = (6-0) : (\bar{6}-6) : (0-\bar{9}) = 6 : \bar{12} : 9 = 2 : \bar{4} : 3$ . Індекс по третій осі дорівнює  $-(r+s) = -(2+\bar{4}) = 2$ . Звідси символ ребра буде  $[2\bar{4}23]$ .

Отже, дві грані визначають ребро на їхньому перетині (й відповідну вісь зони), а два ребра (дві осі зони) – грань кристала, яка проходить паралельно цим ребрам (або належить цим двом зонам). Звідси зрозуміло, що всі можливі грані та ребра кристала легко одержати по чотирьох гранях із відомими символами, три з котрих не перетинаються по паралельних ребрах (тобто не належать одній зоні), або по чотирьох ребрах, три з котрих не лежать в одній площині. Це положення відбиває сутність **закону Х.С. Вейса**, або **закону поясів** (закону зон): всяка площина, паралельна двом ребрам кристала (належить двом його зонам), є можливою гранню кристала, а всякий напрямок, паралельний лінії перетину двох граней кристала, є його можливим ребром.

### Питання для самоконтролю

Що таке можливі грані й можливі ребра кристалів?

Як визначаються індекси в трьохіндексових символах ребер?

Як за символами двох граней визначають символ ребра, по якому вони перетинаються?

Як знаходять символ грані, в площині якої лежать два ребра з відомими символами?

Як визначити символи напрямків, які проходять по діагоналях сторін куба?

Як визначити символ ребра, яке розташоване на перетинах граней  $(11\bar{2}1)$  і  $(10\bar{1}0)$ ?

### ТЕМА 13 ЗАКОН ЗОН ВЕЙСА ТА РОЗВИТОК ПОЯСІВ

Перш ніж формулювати закон Х.С. Вейса (1780–1856), нагадаймо поняття про пояс (зону) та можливі грані й ребра кристала. *Поясом* (або *зоною*) в геометрії багатогранників називається сукупність усіх граней, які перетинаються по паралельних ребрах. Наприклад, грані  $m$ ,  $s$ ,  $m$ ,  $x$  і чотири їм паралельні утворюють вертикальний пояс (рис. 82). Грані  $e$ ,  $p$ ,  $e$ ,  $x$  і чотири їм паралельні нижні утворюють похилий пояс. Грані  $m$ ,  $e$ , розташовані у правій половині кристала, і дві їм паралельні, які перетинаються в ребрі  $3$ , утворюють ще один пояс і т.д. Напрямок, якому паралельні всі грані даного поясу, називається *віссю поясу* (або *зони*). Вісь поясу проходить нормально до площини з полюсами граней даного поясу.

*Можливою гранню* або *можливим ребром* кристала називають таку грань або ребро, котрих немає на даному кристалі, але котрі можуть трапитися на інших кристалах тієї самої речовини. На рис. 82, *а*, *б* зображені два кристали рогової обманки. Грань  $x$ , якої немає на кристалі *а*, спостерігається на кристалі *б*. Вона є для кристала *а* можливою гранню. На рис. 82, *в* зображено фрагмент кристала з гранями  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Припустимо, що цей кристал росте, причому грані  $A$  і  $B$  зберігаються, а грань  $C$  поступово заростає. Тоді лінія перетину граней  $A$  і  $B$ , показана на рисунку штриховкою, стане дійсним ребром нашого кристала. Доти, поки кристал має вказану на рис. 82, *в* форму, цю уявну штрихову лінію ми вважаємо можливим його ребром.

**Закон зон Вейса** формулюється так: в наступному: *кожна площина, яка паралельна двом будь-яким дійсним або можливим ребрам кристала, – це можлива грань кристала, а кожний напрям, паралельний лінії перетину двох будь-яких дійсних або можливих граней кристала, – це можливе ребро кристала.* Тому **кожна грань кристала належить принаймні двом його поясам. А на перетині двох поясів лежить можлива грань.** Обидва формулювання закону, по суті, тотожні.

За допомогою закону Вейса ми можемо передбачити положення можливої грані  $x$ , маючи лише один кристал  $a$  на рис. 82. Справді, площина, паралельна ребрам 1 і 2 кристала  $a$ , є, за законом Вейса, можливою його гранню. Якраз таке положення і займає грань  $x$  у кристалі  $b$ . Уявне ребро між гранями  $A$  і  $B$  у кристалі на рис. 82,  $в$  перетвориться на дійсне, якщо грань  $C$  заросте в умовах пришвидшеного росту.

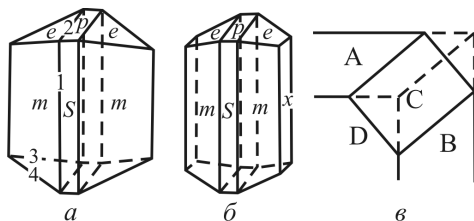


Рис. 82. Можливі грані й ребра:  $a$  – для кристала  $a$  грань  $x$  – можлива, оскільки вона паралельна ребрам 1 і 2;  $b$  – для кристала  $b$  грань  $x$  є дійсною;  $в$  – коса штрихова лінія – можливе ребро, оскільки воно лежить на лінії уявного перетину двох дійсних граней  $A$  і  $B$

Значення закону Вейса полягає в тому, що за його допомогою, знаючи розташування тільки чотирьох будь-яких граней кристала, з яких жодні три не перетинаються в паралельних ребрах (тобто належать *двом різним поясам*) ми можемо вивести нескінченне число можливих граней цього кристала. Для цього слід провести послідовно все нові й нові грані, паралельні будь-яким спочатку дійсним, а потім знову виведеним можливим його ребрам. Цей метод отримав назву *методу розвитку поясів*.

### Метод розвитку поясів

Метод базується на законі поясів. Він дає змогу:

- 1) за двома парами граней із відомими символами й позиціями знаходити позиції нових граней (на перетині поясів);
- 2) розраховувати їхні символи.

Рис. 83 ілюструє найпростіший випадок розрахунків, коли маємо три координатні грані й одну одиничну. Розвиток поясів дає змогу отримати позиції двоодиничних граней і методом додавання індексів розрахувати індекси в їхніх символах (рис. 83,  $a$ ,  $b$ ). Подальший розвиток поясів дає змогу визначитися з гранями  $\{211\}$  і  $\{321\}$  (рис. 83,  $в$ ,  $г$ ).

Більш складний випадок ілюструє рисунок 84. Тут маємо дві зони, визначені гранями  $A(2\bar{1}2)$  –  $B(101)$  і  $C(011)$  –  $D(\bar{2}11)$ . Методом

перехресного множення можна обчислити символи осей цих поясів (ребер  $[AB]$  і  $[CD]$ ).

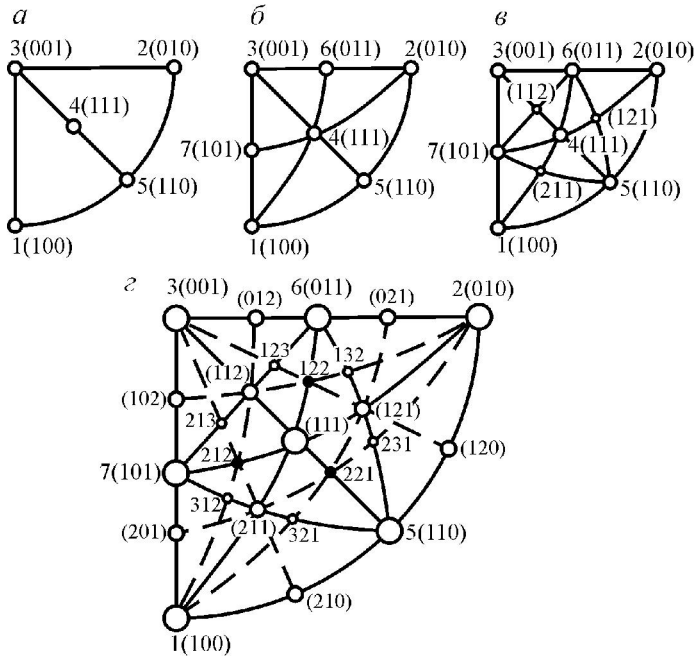


Рис. 83. Вивід можливих граней методом розвитку поясів (зон) із визначенням їхніх символів методом додавання індексів:  $a$  – грань 5 лежить на перетині поясів (1–2) і (3–4), а її символ знайдений методом додавання індексів  $(100)+(010)=(110)$ ;  $b$  – додаткові дводиничні грані 6(011) та 7(101) лежать на перетині поясів (2–3) з (1–4) та (1–3) з (2–4);  $c$  – подальший розвиток поясів зумовлює появу граней (112), (211) і (121);  $z$  – подальший розвиток поясів дає грані  $\{221\}$  та загальні грані  $\{321\}$

Рейбро  $[AB]:$

$$2 \left| \begin{array}{cccc} \bar{1} & 2 & 2 & \bar{1} \\ & \times & \times & \times \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right| 2$$

Одержимо символ ребра  $[\bar{1}01]$ .

Рейбро  $[CD]:$

$$0 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ & \times & \times & \times \\ \bar{2} & 1 & \bar{2} & 1 \end{array} \right| 1$$

Одержимо символ ребра  $[0\bar{1}1]$ .

Грань  $X$ , яка належить обом поясам, паралельна ребрам  $[\bar{1}01]$  і  $[0\bar{1}1]$ . Методом перехресного множення можна розрахувати символ грані  $X$ :

$$\bar{1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \bar{1} & 0 \\ \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} \end{vmatrix} 1$$

Одержимо символ грані  $X$  (111).

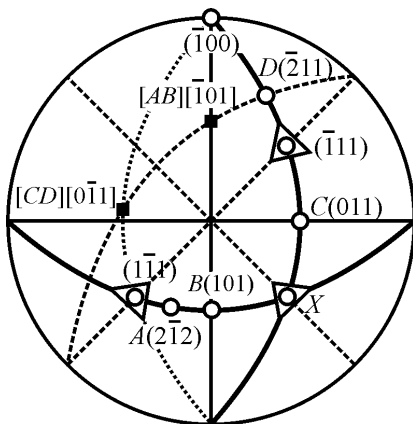


Рис. 84. Визначення позиції грані  $X$ , яка лежить у поясі граней  $A-B$  та  $C-D$ . Ребра  $[AB]$  і  $[CD]$  є осями поясів  $A-B$  та  $C-D$ . Грань  $X$  паралельна ребрам  $[AB]||[\bar{1}01]$  та  $[CD]||[0\bar{1}1]$ , виходи яких зображені чорними квадратами. Додатково показано положення координатної грані  $(\bar{1}00)$  й одиничних граней  $(\bar{1}\bar{1}1)$  і  $(\bar{1}11)$

Таким чином, закон Вейса дає разом із законом Аюї другий спосіб виводу всіх можливих граней кристала по чотирьох із них, належним чином обраних.

### Питання для самоконтролю

Що таке параметри грані та як перевести індекси Вейса в індекси Міллера?

Який символ має вісь поясу з гранями  $(211)$  і  $(011)$ ?

Які два типи символів одиничних граней наявні у кристалах гексагональної і тригональної сингоній?

Як визначити символ грані  $X$ , яка належить двом поясам:  $(101)-(\bar{2}\bar{1}2)$  та  $(011)-(\bar{2}11)$  (рис. 84)?

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- Бакуменко І.Т.* Матеріали до курсу “Кристаллографія”. Вип. 1. – Львів: Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2000. – 78 с.
- Винниченко Т.Г.* Кристаллографія. Вип. 2. Симетрія кристалічних багатогранників. – Львів: Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2002. – 124 с.
- Ворошилов Ю.В., Павлишин В.И.* Основы кристаллографии и кристаллохимии. Рентгенография кристаллов: учебник. – К.: КНТ, 2011. – 568 с.
- Доливо-Добровольский В.В.* Курс кристаллографии. – М.; Л.: ОНТИ, 1937. – 347 с.
- Егоров-Тисменко Ю.К.* Кристаллография и кристаллохимия: учебник / Ю.К. Егоров-Тисменко; под ред. академика В.С. Урусова. – М.: КДУ, 2005. – 592 с.
- Загальская Ю.Г., Литвинская Г.П., Егоров-Тисменко Ю.К.* Геометрическая кристаллография. – Изд. 2-е. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 168 с.
- Костов И.* Кристаллография. – М.: Мир, 1965. – 528 с.
- Нардов В.В.* Практическое руководство по геометрической кристаллографии. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. – 143 с.
- Попов Г.М., Шафрановський І.І.* Кристаллографія: підручник. – Львів: Вид-во Львів. ун-ту, 1959. – 338 с.
- Флинт Е.Е.* Практическое руководство по геометрической кристаллографии. – Изд. 3-е. – М.: Госгеолтехиздат, 1956. – 208 с.
- Хёрблат К., Клейн К.* Минералогия по системе Дэна / пер. с англ. – М.: Недра, 1982. – 728 с.

## РЕКОМЕНДОВАНІ ЕЛЕКТРОННІ РЕСУРСИ

- <http://www.amercrystalassn.org/>  
<http://www.crystallography.net/>  
<http://www.iucr.org/education/>  
<http://www.mineraldata.org/mineral/cristallografia/>  
<http://www.mindat.org/>  
<http://webmineral.com/>

## ЗМІСТ

### ТЕМА 7

Координатні осі та площини (кристалографічні координатні системи).....	1
Правила установки кристалів. Кристалографічні константи.....	3

### ТЕМА 8

Закон раціональності параметрів. Закон раціональності відношень параметрів (закон цілих чисел, закон Аюї).....	8
Одиничні грані в кристалах різних сингоній. Символи граней Браве.....	13
Визначення символів граней простих форм.....	15

### ТЕМА 9

Проектування моделей нижчої категорії з установкою і визначенням символів граней простих форм.....	19
Триклінна сингонія.....	19
Моноклінна сингонія.....	22
Ромбічна сингонія.....	27

### ТЕМА 10

Проектування моделей середньої категорії з установкою і визначенням символів граней простих форм.....	32
Тригональна сингонія.....	33
Тетрагональна сингонія.....	41
Гексагональна сингонія.....	51

### ТЕМА 11

Проектування моделей кубічної сингонії (з установкою і визначенням символів граней простих форм).....	61
-------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

### ТЕМА 12

Символи ребер багатогранників.....	75
------------------------------------	----

### ТЕМА 13

Закон зон Вейса та розвиток поясів.....	81
Список рекомендованої літератури.....	85
Рекомендовані електронні ресурси.....	85



## ДЛЯ ПОДАТК

## ДЛЯ ПОДАТОК